Lösungen zu schriftlichen Aufgaben von Blatt 5

Aufgabe 30. Sei V ein Vektorraum und $A, B, C \leq V$.
(a) Beh.: Genau dann ist $A \cup B \leq V$, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt.

Beweis: Falls $A \subseteq B$, ist $A \cup B = B$ und falls $B \subseteq A$, ist $A \cup B = A$, also in beiden Fällen $A \cup B \leq V$.
Für die andere Schlussrichtung nehmen wir an, dass $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$. Zu zeigen ist, dass dann $A \cup B$ kein Teilraum ist.
Dazu sei $v \in A \setminus B$ und $w \in B \setminus A$. Wäre $v + w \in A$, so wäre $(v + w) - v = w \in A$, da A ein Teilraum ist; dies ist ein Widerspruch zur Wahl von w. Also ist $v + w \notin A$ und mit dem gleichen Argument auch $v + w \notin B$.
Wir haben also $v, w \in A \cup B$ gefunden mit $v + w \notin A \cup B$ und damit ist $A \cup B$ kein Teilraum.

(b) Beh.: Ist $C \subseteq A$, so ist $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

Beweis: Die Inklusion $\subseteq$: Elemente von $A \cap (B + C)$ sind von der Form $b + c$ mit $b \in B$, $c \in C$ und $b + c \in A$. Da $C \subseteq A$, ist $c \in A$ und damit $(b + c) - c = b \in A$ (weil A Teilraum). Also ist $b \in A \cap B$ und somit $b + c \in (A \cap B) + C$.
Und die Umkehrung $\supseteq$: Die Elemente von $(A \cap B) + C$ haben die Form $a + c$ mit $a \in A \cap B$ und $c \in C$. Wegen $C \subseteq A$ ist $c \in A$ und somit auch $a + c \in A$. Da auch $a \in B$, ist $a + c \in B + C$. Insgesamt $a + c \in A \cap (B + C)$.

(c) Frage: Gilt im Allgemeinen die Gleichheit $A \cap (B+C) = (A \cap B) + (A \cap C)$?
Antwort: nein. Zur Begründung geben wir ein Gegenbeispiel:

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $B = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $C = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.
Dann ist $B + C = V$, also $A \cap (B + C) = A$. Und $A \cap B = \{0\}$, $A \cap C = \{0\}$, also $(A \cap B) + (A \cap C) = \{0\}$.

Aufgabe 31.
(a) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Beh.: $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$.

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Bild}\varphi$. Dann gibt es ein $w \in V$ mit $v = \varphi(w)$. Nach Voraussetzung gilt $\varphi(v) = \varphi(\varphi(w)) = \varphi(w) = v$.
Also ist $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

(a') Zusatzbehauptung (nicht in Aufgabe): $V = \mathrm{Bild}\varphi + \mathrm{Kern}\varphi$.

Beweis: Sei $v \in V$, dann ist $v = \varphi(v) + (v - \varphi(v))$ mit $\varphi(v) \in \mathrm{Bild}\varphi$ und $\varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$, also $v - \varphi(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Bemerkung. Die Aussagen in (a) und (a') zeigen, dass $V = \mathrm{Bild}(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}\varphi$ ist (innere direkte Summe).

(b) Sei $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)$.
Beh.: φ ist linear.

Beweis: Die Abbildungen $A \mapsto A$ und $A \mapsto A^t$ sind linear (die zweite wegen $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Also auch deren Linearkombination φ.

Beh.: $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Beweis: Durch Nachrechnen für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\varphi(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$.
$\varphi(\varphi(A)) = \varphi(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t) = \frac{1}{2}\varphi(A) + \frac{1}{2}\varphi(A^t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A + A^t)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A^t + A)) = \varphi(A)$.

Beh.: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = -A^t\}$ (*schiefsymmetrische* Matrizen)

Beweis: $A \in \mathrm{Kern}(\varphi) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A + A^t) = 0 \Leftrightarrow A + A^t = 0 \Leftrightarrow A = -A^t$.

Beh.: $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^t\}$ (symmetische Matrizen)

Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A = \varphi(B) = \frac{1}{2}(B + B^t)$.
Die Inklusion $\subseteq$ folgt aus $A^t = (\frac{1}{2}(B + B^t))^t = \frac{1}{2}(B^t + B) = A$.
Für die Umkehrung $\supseteq$ sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^t$. Dann ist $\varphi(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}(2A) = A$, also ist $A \in \mathrm{Bild}(\varphi)$.

(c) Sei φ wie in (b).
Beh.: $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi)$.

Das wurde oben in (a) und (a') schon allgemeiner gezeigt.
(In diesem Fall: Jede quadratische Matrix ist Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix: $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$.)