Kapitel 3

Äquivalenz für Endomorphismen

3.1 Jordan-Normalform

Lernziele 7. • Jordan-*Normalform für die Matrix eines Endomorphismus*

Wir wollen über das Klassifikationsproblem der Endomorphismen eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes sprechen oder, was äquivalent hierzu ist, über eine Normalform der Matrizen des Endomorphismus, die durch eine gewisse Basiswahl erreicht wird.

Definition 3.1. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über dem Körper K der Dimension $n \in \mathbb{N}$.
1) Zwei Endomorphismen $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(V)$ heißen *ähnlich* oder *konjugiert* unter $\mathrm{GL}(V)$, falls ein $\gamma \in \mathrm{GL}(V)$ existiert mit $\alpha = \gamma \circ \beta \circ \gamma^{-1}$, d.h. α, β liegen in derselben Bahn unter der Operation

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V) : (\gamma, \zeta) \mapsto \gamma \circ \zeta \circ \gamma^{-1}.$$

2) Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen *ähnlich* oder *konjugiert* unter $\mathrm{GL}(n, K)$, falls ein $g \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert mit $A = gBg^{-1}$, d. h. A, B liegen in derselben Bahn unter der Operation

$$\mathrm{GL}(n, K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n} : (g, C) \mapsto gCg^{-1}.$$

Es liegen ähnliche Operationen vor. Die Matrizen, die einen festen Endomorphismus beschreiben, bilden eine Ähnlichkeitsklasse, wenn man die Basis variieren läßt. Zwei Endomorphismen sind genau dann durch dieselbe Matrix beschreibbar, wenn sie konjugiert sind.

Wir hatten bereits das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom als Invarianten dieser Operation kennengelernt:

$$\mu : \mathrm{End}(V) \to K[X] : \alpha \mapsto \mu_\alpha = \mu_\alpha(X)$$

und

$$\chi : \mathrm{End}(V) \to K[X] : \alpha \mapsto \chi_\alpha = \chi_\alpha(X).$$

Der einfache und gleichzeitig generische Fall ist der, dass das Minimalpolynom vielfachheitenfrei ist. In diesem Fall ist es das charakteristische Polynom bereits eine trennende Invariante und wir hatten gesehen, dass man Blockdiagonalmatrizen von Begleitmatrizen irreduzibler Polynome als Verteter der Ähnlichkeitsklassen findet.

Übung: Zeige: Für jedes Polynom $p(X) \in K[X]$ ist

$$\mathrm{End}(V) \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : \alpha \mapsto \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(p(\alpha)))$$

eine Invariante.

Es wird sich zeigen, dass es besser ist, die Wahl des Polynoms p von dem Endomorphismus α abhängig zu machen.

Wir benötigen noch folgenden Satz über Restklassenkörper, die irreduzible Polynome uns liefern:

Satz 3.2. *Ist $p \in K[X]$ irreduzibel, d.h. $n := \mathrm{Grad}(p) > 0$ und p hat keine Teiler in $K[X]$ von Grad m mit $0 < m < n$.*
Sei die Äquivalenzrelation $\sim_p$ auf $K[X]$ definiert durch: $f \sim_p g$ genau dann, wenn $p|(f-g)$. Auf den Klassen ist eine vertreterweise Addition und Multiplikation definiert. Mit diesen Verknüpfungen bildet $K[X]/\sim_p$ einen Körper: Der Restklassenkörper $K[X]/pK[X]$. Wegen der Division mit Rest bildet $K[X]_{Grad<n}$ ein Vertretersystem der Klassen von $K[X]/pK[X]$.

Beweis. (Skizze) $K[X]$ ist assoziative, kommutative K-Algebra mit Eins, so daß sich die meisten Gesetze auf die Restklassenalgebra $K[X]/pK[X]$ sofort vererben. Jedoch müssen wir die Wohldefiniertheit der Multiplikation zeigen (Übung). Verbleibender Punkt: Invertierbarkeit der Elemente, die nicht 0 sind. Sei also $g \in K[X]$ mit $\overline{g} \neq 0$ in $K[X]/pK[X]$. Da p irreduzibel ist, liefert der Euklidische Algorithmus $a, b \in K[X]$ mit $ag + bp = 1$. Es folgt $\overline{g}^{-1} = \overline{a}$. q. e. d.

Wir wollen in diesem Abschnitt für einen gegebenen Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ eine möglichst einfache Form für die Matrix ${}^B\alpha^B$ finden. Bisher haben wir nur Spezialfälle betrachtet, an die wir uns kurz erinnern wollen. Für den ganzen Abschnitt sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Hier ist eine Zusammenfassung einiger relevanter Ergebnisse aus dem ersten Semester.

Bemerkung 3.3. **[Hauptraumzerlegung]** Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Ist $\mu_\alpha = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{m(i)}$ die Zerlegung des Minimalpolynoms in normierte irreduzible und paarweise verschiedene Polynome p_i, dann gilt:

1. Das charakteristische Polynom von α ist $\chi_\alpha = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c(i)}$ mit $c(i) \geq m(i)$.

2. Man hat eine Zerlegung von V in die p_i-*Haupträume* $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$, die alle α-invariant sind:
$$V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha)).$$
Man hat $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha)) = \mathrm{Bild}(q_i(\alpha))$ mit $q_i := \prod_{j\neq i}^{\ell} p_j^{m(j)}$.

3. Die Projektionen der Zerlegung sind gegeben durch $\pi_i = (a_i q_i)(\alpha)$ wobei $a_i \in K[X]$ mit
$$1 = a_1 q_1 + \cdots a_\ell q_\ell$$
gegeben sind.

4. Für die Dimension der Haupträume gilt
$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))) = c(i)\,\mathrm{Grad}(p_i).$$

5. Im Falle $m(i) = 1$ ist $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$ ein $\mathbb{F} := K[X]/p_i K[X]$-Vektorraum mit der skalaren Multiplikation definiert durch $(f + gp) \cdot v := f(\alpha)(v) + g(\alpha)p(\alpha)(v) = f(\alpha)(v)$. Die Dimension von $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$ als $\mathbb{F}$-Vektorraum ist $c(i)$, denn wir sehen leicht, dass $v, \alpha(v), \ldots, \alpha^{d-1}(v)$ skalare Vielfache voneinander sind. Aus einer $K[X]/p_i K[X]$-Basis konstruiert man leicht eine K-Basis, die für die Einschränkung von α auf $\mathrm{Kern}(p_i^{m(i)}(\alpha))$ die Matrix
$$I_{c(i)} \otimes M_{p_i} = Diag(M_{p_i}, \cdots, M_{p_i})$$
liefert, wobei M_{p_i} die Begleitmatrix von p_i ist. (Wichtiger Spezialfall: $p_i(X) = X - a$ für ein $a \in K$. Dann ist $M_{p_i} = a$ und wir haben ($m(i) = 1$ vorausgesetzt) eine Basis aus Eigenvektoren für den Hauptraum.)

Übung: Sei $\mu_\alpha = p^r$ für ein irreduzibles normiertes Polynom $p \in K[X]$. Zeige, dass der Algorithmus zur Berechnung des Minimalpolynoms einen Vektor $v \in V$ als Nebenprodukt produziert, für dessen Minimalpolynom gilt: $\mu_{\alpha,v} = \mu_\alpha$.

Mit diesen Vorbemerkungen wollen wir zunächst einen kurzen Blick auf den Zentralisator eines Endomorphimus werfen.

Definition 3.4. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt

$$C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha) := \{\beta \in \mathrm{End}(V) | \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha\} \leq \mathrm{End}(V)$$

der *Zentralisator* oder die *Zentralisatoralgebra* von α (in $\mathrm{End}(V)$).

Übung: Zeige: $C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ ist der Kern der linearen Abbildung

$$\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V) : \gamma \mapsto \alpha \circ \gamma - \gamma \circ \alpha.$$

Es ist sofort klar, dass $C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ eine K-Teilalgebra von $\mathrm{End}(V)$ ist und dass $\mathrm{Aut}_\alpha(V) := \mathrm{GL}(V) \cap C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(V)}(\alpha)$ bei der Konjugationsoperation ist. Unsere Erfahrung sollte uns zeigen, dass die Operation dieses Stabilisators auf V wichtige Einsichten erzeugt.

Satz 3.5. *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ etc. wie in Bemerkung 3.3.*
Setze $V_i = \pi_i(V)$ und $\alpha_i = \alpha_{|V_i} : V_i \to V_i$.

1. *Für $\beta \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ und $1 \leq i < j \leq \ell$ gilt $\pi_i \circ \beta \circ \pi_j = 0$, d.h. β respektiert die Zerlegung von V in seine Haupträume, und somit gilt insbesondere*

$$\beta = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\pi_i \circ \beta \circ \pi_i}_{\in C_{\mathrm{End}(V_i)}(\alpha_i)}$$

   und

$$C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} C_{\mathrm{End}(V_i)}(\alpha_i)$$

2. *Sei $\mu_\alpha(X) = \chi_\alpha(X)$, also das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom seien gleich. Dann ist*

$$(\mathrm{Id}_V, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$$

   mit $n = \mathrm{Dim}(V)$ eine K-Vektorraumbasis von $C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$.

Beweis. 1.) Da $\beta \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ mit α vertauschbar ist, ist es auch mit jedem Polynom in α vertauschbar, insbesondere mit den π_i. Da $\beta \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ folgt mit Präsenzübung 7, dass $\pi_i \circ \beta \circ \pi_j = 0$. Dann ist

$$\beta = 1 \circ \beta \circ 1 = (\pi_1 + \cdots + \pi_\ell) \circ \beta \circ (\pi_1 + \cdots + \pi_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i \circ \beta \circ \pi_i.$$

Offensichtlich ist $\pi_i \circ \beta \circ \pi_i \in \mathrm{End}(V_i)$ und als Polynom in α ist π_i mit jedem Element in $C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ vertauschbar. Also ist $\pi_i \circ \beta \circ \pi_i = \pi_i \circ \pi_i \circ \beta = \pi_i \circ \beta$ und daher für alle $v \in V_i$ $\pi_i \circ \beta \circ \pi_i \circ \alpha_i(v) = \pi_i \circ \beta \circ \pi_i \circ \alpha(v) = \pi_i \circ \beta \circ \alpha(v) \pi_i \circ \alpha \circ \beta(v) = \alpha \circ \pi_i \circ \beta \circ \pi_i(v) = \alpha_i \circ \pi_i \circ \beta \circ \pi_i(v)$.

Damit folgen die Aussagen.

2.) Aus der Vorübung schließen wir, dass jeder Hauptraum V_i einen Vektor enthält, dessen Minimalpolynom gleich $p_i^{m(i)}$ ist. Die Summe dieser Vektoren ist ein Vektor $v \in V$ mit Minimalpolynom $\mu_{\alpha,v}(X) = \mu_\alpha(X)$. Da $\mu_\alpha(X) = \chi_\alpha(X)$ ist

$$(v, \alpha(v), \ldots, \alpha^{n-1}(v))$$

eine Basis von V. Sei nun $\beta \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$ und

$$\beta(v) = v' = \sum a_i \alpha^i(v) \text{ für geeignete } a_i \in K.$$

Dann ist $\beta(\alpha(v)) = \alpha(\beta(v)) = \alpha(v')$ und allgemeiner $\beta(\alpha^j(v)) = \alpha^j(v')$, also

$$\beta(\alpha^j(v)) = (\sum_i a_i \alpha^i)(\alpha^j(v)).$$

Also hat β denselben Effekt auf unsere Basis wie $\sum a_i \alpha^i$, d. h. $\beta = \sum a_i \alpha^i$. q. e. d.

Der letzte Satz kann auch in der Sprache der Matrizen ausgedrückt werden.

Definition 3.6. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Jeder Vektor $v \in V$ mit $\langle v \rangle_\alpha := K[\alpha](v) = V$ heißt ein *zyklischer Vektor* von V (bezüglich α). Falls ein solcher existiert, heißt V ein *zyklischer Vektorraum* bezüglich α.

Wir nehmen ab jetzt an, dass wir nur einen Hauptraum haben, also $\ell = 1$, d. h. $\mu_\alpha(X) = p^m$ mit $p \in K[X]$ irreduzibel und normiert und $\chi_\alpha(X) = p^c$.

Bemerkung 3.7. Falls $\mu_\alpha = p^m$ mit $p = X - a$ ein lineares Polynom und $m = c = \mathrm{Dim}(V)$, so ist V ein zyklischer Vektorraum bezüglich α. Genauer: Setze $\gamma := \alpha - a\,\mathrm{Id}_V = p(\alpha)$. Jedes $v \in V - \gamma(V)$ liefert eine Basis $B := (v, \gamma(v), \ldots, \gamma^{m-1}(v))$ von V, so dass die Matrix von α gegeben ist durch

$$_B\alpha^B = J_m(a) := aI_m + \underbrace{M_{X^m}}_{_B\gamma^B} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Sämtliche α-invarianten Teilräume von V sind gegeben durch

$$\langle \gamma^i(v) \rangle_\alpha = \mathrm{Bild}(\gamma^i)$$

für $i = 0, 1, \ldots m$.

Diese Bemerkung müssen wir jetzt auf den allgemeineren Fall $\mu_\alpha = \chi_\alpha = p^m$ mit irreduziblem p übertragen. Hierfür benötigen wir noch eine Aussage, die auf dem nächsten Übungsblatt bewiesen werden soll: Hat $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ irreduzibles Minimalpolynom p, so wird V durch die Setzung

$$\overline{q}v := q(\alpha)(v)$$

für $q \in K[X]$ zu einem $K[X]/pK[X]$-Vektorraum.

Satz 3.8. *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mu_\alpha = p^m$ mit irreduziblem $p \in K[X]$ und $d := \mathrm{Grad}(p)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *V ist zyklisch bezüglich α.*
2. *$\mathrm{Kern}(p(\alpha))$ hat Dimension d über K.*
3. *$\gamma = p(\alpha)$ hat Rang $\dim(V) - d$.*
4. *$\mu_\alpha = \chi_\alpha$.*

Beweis. Zunächst einige allgemeine Vorbemerkungen: Setze $V_i := \mathrm{Bild}(p(\alpha)^i)$. Nach Definition des Minimalpolynoms ist $V_{m-1} \neq \{0\}$ und $V_m = \{0\}$. Weiter sind die V_i alle α-invariant, d.h. $\alpha(V_i) \subseteq V_i$. Es ist

$$V = V_0 \geq V_1 \geq \cdots \geq V_{m-1} \geq V_m = \{0\}.$$

Die Faktoren $V_i/V_{i+1} = \gamma(V_{i-1}/V_i)$ sind epimorphe Bilder voneinander, also

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}(V_{m-1}) &\leq \mathrm{Dim}(V_i) - \mathrm{Dim}(V_{i+1}) \leq \mathrm{Dim}(V_{i-1}) - \mathrm{Dim}(V_i) \leq \cdots \leq \mathrm{Dim}(V) - \mathrm{Dim}(V_1) \\ &= \mathrm{Dim}(V) - \mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\gamma)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\gamma)).\end{aligned}$$

Weiterhin induziert α einen Endomorphismus α_i auf V_i/V_{i+1}. Dieser hat offensichtlich p als Minimalpolynom, so dass wir wie oben erwähnt, V_i/V_{i+1} als $K[X]/pK[X]$-Vektorraum auffassen kann. Man hat einerseits

$$c\,\mathrm{Grad}(p) = \mathrm{Dim}(V) = \sum \mathrm{Dim}(V_i/V_{i+1})$$

und andererseits ist für jedes i

$$\mathrm{Dim}(V_i/V_{i+1}) = \mathrm{Grad}(p)\,\mathrm{Dim}_{K[X]/pK[X]}(V_i/V_{i+1}).$$

Nun werden die Äquivalenzen offensichtlich: *b)* $\Leftrightarrow$ *c)* folgt aus dem Homomorphiesatz. d) ist äquivalent zu $c = m$, so dass die Äquivalenz *a)* $\Leftrightarrow$ *d)* über $\mathrm{Dim}_{K[X]/pK[X]}(V_i/V_{i+1}) = 1$ klar wird, wenn man berücksichtigt, dass a) äquivalent zu $\mathrm{Dim}_{K[X]/pK[X]}(V_0/V_1) = 1$ ist, was wiederum äquivalent zu b) ist. q. e. d.