Mit Hilfe der Determinante hat man ein Kriterium, welche $X \in V^n$ eine Basis von V sind, also linear unabhängig sind. Wir formulieren dieses Kriterium zusammen mit einem praktischen Hinweis, wie man die Determinante am besten ausrechnet.

Satz 2.21. *1) Sei $X = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$, $1 \leq k \leq n$ und weiter sei*

$$Y : \underline{n} \to V : i \mapsto \begin{cases} v_i & i \neq k \\ v_k + w & i = k \end{cases}$$

für ein $w \in \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots v_n \rangle$. Dann gilt $\det(X) = \det(Y)$.
2) $X \in V^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\det(X) = 0$ gilt.

Beweis. 1) Sei $w = \sum_i a_i v_i$ mit $a_i \in K$ und $a_k = 0$. Dann gilt

$$\det(Y) = \det X + \sum_{i \neq k} a_i 0$$

wegen der Linearität in der k-ten Komponente und weil det alternierend ist.
2) Ist X linear abhängig, so folgt $\det(X) = 0$ aus 1). Ist X linear unabhängig, so ist X eine Basis und es gibt genau eine bezüglich X normierte Determinante $\det_X$ von V. Da $\mathrm{Dim}(\Lambda^n(V^*)) = 1$ ist, ist sowohl (det) als auch ($\det_X$) eine Basis von $\Lambda^n(V^*)$. Also ist jedes ein Vielfaches $\neq 0$ von dem anderen, insbesondere $\det(X) \neq 0$. q. e. d.

Wir wollen jetzt Determinanten von quadratischen Matrizen definieren.

Definition 2.22. Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann setzt man

$$\det(A) := \det(A_{-,1}, \dots, A_{-,n})$$

wobei die Determinante auf der rechten Seite die bezüglich der Standardbasis normierte Determinante des $K^{n \times 1}$ ist.

Hier sind zwei wichtige Eigenschaften von Determinanten von Matrizen.

Satz 2.23. *1) Für $A \in K^{n \times n}$ gilt*

$$\det(A) = \det(A^{tr}).$$

2) Für $A, C \in K^{n \times n}$ gilt

$$\det(AC) = \det(A)\det(C).$$

Beweis. 1) Man hat

$$\begin{array}{rcl} \det(A) & = & \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_i a_{\pi(i),i} \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_\ell a_{\ell,\pi^{-1}(\ell)} \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_\ell a^{tr}_{\pi^{-1}(\ell),\ell} \\ & = & \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_\ell a^{tr}_{\pi(\ell),\ell} \\ & = & \det(A^{tr}). \end{array}$$

2) Ist $\det(C) = 0$, so ist die Behauptung klar, da dann auch die Spalten von AC linear abhängig sind. Sei also $\det(C) \neq 0$. Man sieht leicht, daß mit der Determinante det auf $K^{n\times 1}$ ebenfalls

$$\Delta : (K^{n\times 1})^n \to K : X \mapsto \det(XC)$$

in dem eindimensionalen K-Vektorraum $\Lambda^n((K^{n\times 1})^*)$ liegt, also ein Vielfaches von det ist. Den Faktor bestimmt man durch Einsetzen der Standardbasis. Die Behauptung folgt. q. e. d.

Übung: Man formuliere die Entwicklung der Determinante nach einer Zeile.

Übung: Sei $k + \ell = n$, $A_1 \in K^{k\times k}$, $A_2 \in K^{\ell\times\ell}$, $A_3 \in K^{\ell\times k}$. Man zeige (mit der im zweiten Teil des Beweises angewandten Technik):

$$\det(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}) = \det(A_1)\det(A_2).$$

Korollar 2.24. *Bezeichnen wir die Einschränkung der Determinante von $K^{n\times n}$ wieder mit* det*, so gilt:*

$$\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K^* : A \to \det(A)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus auf die multiplikative Gruppe des Körpers K. Der Kern dieses Homomorphismus, also das volle Urbild der 1 wird mit $\mathrm{SL}(n, K)$ bezeichnet und heißt die spezielle lineare Gruppe*. Weiter heißt $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die* spezielle orthogonale Gruppe *vom Grad n über $\mathbb{R}$ und wird mit $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet.*

Übung: Zeige, die Operation von $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ auf der Menge der ONBasen eines n-dimensionalen EUKLIDischen Raumes liefert genau zwei Bahnen. Zwei Basen in derselben Bahn heißen *gleich orientiert*. Wie kann man **Orientierungen** von Basen in beliebigen n-dimensionalen reellen Vektorräumen definieren? (Hinweis: Die Matrizen positiver Determinante bilden auch eine Gruppe.)

***Beispiel* 2.25.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe: Berechne $\det(A)$.
1. Lösung (sehr schlecht): Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(A) = 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+3 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = ...$$

Etwas besser wäre die Entwicklung nach der ersten Spalte (Vorzeichen $+ - + -$).
2. Lösung (mit Zeilen und Spaltenumformungen):

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= - \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -(2^2 + 2) = -6$$

Wie kann man übrigens sofort sehen, daß der Wert der Determinante unabhängig von a ist?

Der folgende Satz ist mehr von theoretischem als praktischem Interesse.

Satz 2.26. *(CRAMERsche Regel) Ist $A \in K^{n \times n}$ von Höchstrang, also $\det(A) \neq 0$, und $b \in K^{n \times 1}$, dann ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, $\quad x \in K^{n \times 1}$ gegeben durch*

$$x_{i,1} = \frac{\det(A^{i,b})}{\det(A)}$$

für $i = 1, \ldots, n$, wobei $A^{i,b}$ dieselben Spalten wie A hat, außer daß die i-te Spalte durch b ersetzt ist.

Beweis. Daß die Gleichung eindeutig lösbar ist, wissen wir bereits. Sei also $x \in K^{n \times 1}$ die Lösung. Dann haben wir $b = \sum x_{i,1} A_{-,i}$, also durch Einsetzen

$$\det(A^{i,b}) = 0 + \ldots + 0 + x_{i,1} \det(A) + 0 + \ldots + 0.$$

q. e. d.

Als Folgerung aus der CRAMERschen Regel bekommt man eine Formel für die Inverse einer Matrix, die aber nur von theoretischem Wert ist.

Korollar 2.27. *Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Die Einträge der Inversen A^{-1} sind gegeben durch*

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A^{ji})}{\det(A)}$$

wo $A^{ji} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht. Die Matrix
$((-1)^{i+j} \det(A^{ji}))$ heißt auch Matrix der Kofaktoren.

Beweis. Die j-te Spalte $(A^{-1})_{-,j}$ von A^{-1} ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = I_{-,j}$, berechnet sich also nach der CRAMERschen Regel:

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{\det(A^{i,I_{-,j}})}{\det(A)}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $(-1)^{i+j} \det(A^{ji}) = \det(A^{i,I_{-,j}})$ gilt. Dies folgt einfach durch Entwickeln von $\det(A^{i,I_{-,j}})$ nach der i-ten Spalte. q. e. d.

Bemerkung 2.28. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Wir können auch Determinanten für Matrizen über kommutativen Ringen definieren, indem wir eine Abbildung $det : R^{n\times n} \to R$ definieren, die bezüglich der Spalten einer Matrix multilinear, alternierend und normiert bezüglich der Einheitsmatrix ist. Wieder können wir wie oben beweisen, dass die Determinante eindeutig ist. Wir sehen weiter, dass eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ invertierbar ist genau dann, $\det(A) \in R^*$. Diese Betrachtungsweise wenden wir nun auf Polynomringe an.

Wir wollen jetzt das charakteristische Polynom eines Endomorphismus definieren.

Definition 2.29. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt

$$\chi_\alpha(X) := \det(XI_n - {}^B\alpha^B)$$

das *charakteristische Polynom* von α, wobei $B \in V^n$ eine Basis von V ist.

Lemma 2.30. *Das charakteristische Polynom $\chi_\alpha(X)$ ist wohldefiniert und hängt insbesondere nicht von der Wahl der Basis B ab.*

Beweis. Das Ergebnis ist ein Polynom, also in $K[X]$ nach der Formel für Determinanten aus dem Existenzbeweis. Schließlich sei $C \in V^n$ eine weitere Basis von V. Dann gilt mit $T = {}^C\operatorname{Id}_V^B$:

$$\begin{aligned}\det(XI_n - {}^C\alpha^C) &= \det(XI_n - T({}^B\alpha^B)T^{-1}) \\ &= \det(T(XI_n - {}^B\alpha^B)T^{-1}) \\ &= \det(T)\det(XI_n - {}^B\alpha^B)\det(T)^{-1} \\ &= \det(XI_n - {}^B\alpha^B)\end{aligned}$$

q. e. d.

Lemma 2.31. *Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $\alpha \in \operatorname{End}(V)$. Ist $U \leq V$ ein α-invarianter Teilraum, so gilt $\chi_{\alpha_{|U}}$ teilt χ_α.*

Beweis. Sei $C = (v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von U, die zu einer Basis $B = (v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ von V ergänzt wird. Dann ist

$${}^B\alpha^B = \begin{pmatrix} {}^C\alpha^C_{|U} & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

und somit $\chi_\alpha = \chi_{\alpha_{|U}}\chi_{A_2}$. q. e. d.

Hier sind die wichtigsten Eigenschaften des charakteristischen Polynoms.

Satz 2.32. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\alpha \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:*

1. *$\chi_\alpha(X) \in K[X]$ ist normiert vom Grad $n = \operatorname{Dim}(V)$. Der Koeffizient von X^{n-1} ist gleich $-\operatorname{Spur}(\alpha)$ und der Koeffizient von X^0 gleich $(-1)^n \det(\alpha)$.*

2. *$a \in K$ ist Eigenwert von α genau dann, wenn $\chi_\alpha(a) = 0$, d. h. falls a eine Wurzel von $\chi_\alpha(X)$. In anderen Worten, das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom haben dieselben Nullstellen.*

3. *(Hamilton-Cayley) $\chi_\alpha(\alpha) = 0$, d. h. das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom: $\mu_\alpha(X)|\chi_\alpha(X)$.*

Beweis.

1. Setze $A := {}^B\alpha^B$ und

$$C := XI_n - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & x - a_{n2} & \ldots & x - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir wenden die Leibnitz-Formel an (Satz 2.17)

$$\det(C) = \operatorname{sign}(\pi) \sum_{\pi \in S_n} c_{\pi(1),1} c_{\pi(2),2} \cdots c_{\pi(n),n}.$$

Nun hat das Polynom $c_{\pi(j),j}$ den Grad 0 falls $\pi(j) \neq j$ und den Grad 1 falls $\pi(j) = j$. Also hat jeder Summand höchstens den Grad n. Es gibt nur einen Summanden vom Grad n, nämlich der zur Permutation $\pi = id$ gehörende Summand. Alle anderen Summanden haben kleineren Grad. Für $\pi = id$ erhalten wir den Summanden

$$(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn}) = x^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})x^{n-1}+\cdots = x^n-Spur(A)x^{n-1}+\cdots .$$

Für jedes $\pi \neq id$ gilt $\pi(i) = i$ für höchstens $n-2$ verschiedene $i \in \underline{n}$, also ist der Grad von $c_{\pi(1),1}c_{\pi(2),2}\cdots c_{\pi(n),n}$ höchstens $n-2$.

Weither ist der Koeffizient von X^0 gleich $\chi(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Damit folgt die Behauptung.

2. $\mathrm{Kern}(\alpha - a\,\mathrm{Id}_V) \neq \{0\}$ ist äquivalent mit $\det(\alpha - a\,\mathrm{Id}_V) = 0$, d. h. $\chi_\alpha(a) = 0$.

3. Wir zeigen, dass $\chi_\alpha(\alpha)$ die 0-Abbildung ist, also dass für alle $v \in V$ gilt $\chi_\alpha(\alpha)(v) = 0$.

   Dies ist sicherlich der Fall für $v = 0$. Setze $U = K[\alpha]v$ und $m = \mathrm{Dim}(U)$. Angenommen $\alpha^m(v) + \sum_{k=0}^{m-1} c_i v^i = 0$. Dann ist U α-invariant und das Minimalpolynom $\mu_{\alpha,v}$ ist gleich dem charakteristischen Polynom $\chi_{\alpha_{|U}}$, da die Matrix von $\alpha_{|U}$ gerade die Begleitmatrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -c_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{m-1} \end{pmatrix}$$
   von $\mu_{\alpha,v} = X^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_i X^i$ ist und für diese kann man nachrechnen, dass $\mu_{\alpha,v}$ auch das charakteristische Polynom $\chi_{\alpha_{|U}}$ ist.

   Nach Konstruktion ist $v \in U = K[\alpha]v$ und $\chi_{\alpha_{|U}}(v) = \mu_{\alpha,v}(v) = 0$. Nach Lemma 2.31 gilt nun $\chi_\alpha = h\chi_{\alpha_{|U}}$ mit $h \in K[X]$, und somit $\chi_\alpha(\alpha)(v) = h(\alpha)\chi_{\alpha_{|U}}(v) = h(\alpha)(0) = 0$.

q. e. d.

Wir wollen diesen Abschnitt beschließen mit dem Zusammenhang von n-dimensionalen Volumina in einem reellen n-dimensionalen Vektorraum V und Determinanten. Wir wissen schon, daß das Vorzeichen der Determinante geometrisch als Orientierung verstanden werden kann. Man macht sich nun leicht klar, daß die drei Grundeigenschaften der Determinante sehr wohl als Minimalforderungen an ein Volumen für **Parallelepipede** interpretiert werden kann. Das von $X = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ erzeugte Parallelepiped $P(X)$ ist definiert als

$$P(X) := \{a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \mid 0 \leq a_i \leq 1 \qquad (1 \leq i \leq n)\}.$$

Die Eigenschaften der Determinante entsprechen auch dem eines (orientierten) Volumen. Das Volumen von $P(X)$ ist 0, wenn X linear abhängig ist. Weiterhin ist das Volumen von $P(X)$ multilinear. Man sieht also aus den Eigenschaften der Determinante, daß das *Volumen* von $P(X)$ durch

$$\operatorname{vol}(P(X)) := |\det(X)|$$

bis auf einen (für alle Parallelepipede gleichen) Faktor die einzig sinnvolle Definition für das Volumen eines Parallelepipeds ist. Wir fassen also $\det(X)$ als ein signiertes Volumen auf, wo das Vorzeichen noch Information über die Orientierung von X enthält. Man beachte, für $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ ist neben der naheliegenden Definition $\det(\alpha) := \det({}^C\alpha^C)$ für irgendeine Basis C von V die Definition

$$\det(\alpha) := \frac{\det(\alpha \circ X)}{\det(X)}$$

für $X \in V^n$ Basis von V, eine alternative Definition, die im Falle reeller Vektorräume zudem noch eine geometrische Interpretation als *Volumenverzerrung* zuläßt.

Der Zusammenhang zwischen Volumina und Determinanten wird zum Beispiel beim mehrdimensionalen Riemann Integral ausgenutzt.

Übung: Sei (V, Φ) ein n-dimensionaler EUKLIDischer Vektorraum mit Determinante normiert bezüglich einer ONBasis. (Also der Einheitswürfel bekommt Volumen 1.) Zeige für jede Basis $X \in V^n$ gilt:

$$\operatorname{vol}(P(X)) = \sqrt{\det({}_X\Phi^X)}.$$