2.2 Determinanten

Lernziele 6.
- *Definition und Beispiele von Multilinearformen,*
- *Determinante,*
- *Berechnungsverfahren und Anwendungen,*
- *Volumenverzerrung, charakteristisches Polynom.*

Wir wollen in diesem Abschnitt Determinanten einführen. Sie sind wichtige Werkzeuge der Theorie und haben viele Anwendungen auch außerhalb der linearen Algebra.

Definition 2.10. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $B \in V^n$ eine Basis von V. Die (bezüglich B normierte) *Determinante* von V ist eine Abbildung

$$\det : V^n \to K : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

1. det ist **multilinear**, d. h.

$$\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) = \\ a \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) + b \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

   für alle $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ und $v_i' \in V$ für $1 \leq i \leq n$.

2. det ist **alternierend**, d. h. $\det(X) = 0$ für alle $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, für die $i, j \in \underline{n}, i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$, (also nicht injektive $X \in V^n$).

3. det ist **normiert**, d.h. $\det(B) = 1$.

***Beispiel* 2.11.** 1) Für $V = K$ mit Basis $B = (1)$ ist $\det = \mathrm{Id}_K$.
2) Für $V = K^{2\times 1}$ mit der Standardbasis S als Basis B ist

$$\det(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

(Beweis: Übung).
3) Ist V beliebig mit Basis $B \in V^n$, so kann man mit der Dualbasis $B^* \in (V^*)^n$ verschiedene Multilinearformen konstruieren. Z.B.

$$b_1^* \otimes b_2^* \otimes \ldots \otimes b_n^* : V^n \to K : X = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto b_1^*(v_1) b_2^*(v_2) \cdots b_n^*(v_n)$$

ist multilinear und normiert, aber für $n > 1$ nicht alternierend;

$$b_1^* \otimes b_2^* \otimes b_3^* \otimes \ldots \otimes b_n^* - b_2^* \otimes b_1^* \otimes b_3^* \otimes \ldots \otimes b_n^*$$

ist multilinear, normiert, aber nur in Bezug auf die ersten beiden Komponenten alternierend.

Wir werden im Folgenden zwei Aussagen über eine Determinante beweisen: Nachweis der Eindeutigkeit und Nachweis der Existenz. Zum Nachweis der Eindeutigkeit, der gleichzeitig eine Idee vermittelt, wie man eine Determinante ausrechnet, brauchen wir etwas Vorbereitung aus der Gruppentheorie.

Wir fragen uns zuerst, was uns motiviert Determinanten zu definieren. Sei K ein Körper. Um zu entscheiden, ob das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für jedes $y = (y_1, y_2)^{tr} \in K^{2\times 1}$ lösbar ist, d.h. ob die Abbildung $\varphi_A : K^{2\times 1} \to K^{2\times 1}$ surjektiv ist, lösen wir das Gleichungssystem nach einer Unbekannten auf und erkennen, das Gleichungssystem ist genau dann für jeds $y \in K^{2\times 1}$ lösbar, falls $ad - bc \neq 0$.

Analog können wir nun für eine 3×3 Matrix verfahren und sehen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

genau dann für jedes $y = (y_1, y_2, y_3)^{tr}$ lösbar ist, d.h. die Abbildung $\varphi_A : K^{3\times 1} \to K^{3\times 1}$ surjektiv ist, falls $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$. Dies könnten wir für höhenere Dimensionen fortstezen. Die so definierete Funktion von $K^{n\times n} \to K$ liefert eine Determinante. Ist dies die einzig mögliche Determinante?

An dieser Stelle sei auch erwähnt, dass die Axiome für eine Determinantenabbildung nun völlig natürlich sind, denn die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn wir das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addieren. Ausserdem ist das Gleichungssytem sicherlich nicht für alle $y \in K^{n\times 1}$ lösbar, falls die Matrix der Abbildung zwei gleiche Spalten hat.

Exkurs in die Gruppentheorie der symmetrischen Gruppe

Es sei daran erinnert, daß Homomorphismen von einer Gruppe in eine andere Abbildungen sind, die mit der Multiplikation (und damit auch mit dem Invertieren) vertauschbar sind. Den Homomorphismus, den wir später benötigen, ist der folgende:

Definition 2.12. 1) Eine *Permutation* der Menge M ist ein Element der symmetrischen Gruppe S_M. Für $a, b \in M, a \neq b$ bezeichnet $\tau_{a,b}$ die Permutation

$$\tau_{a,b} : M \to M : m \mapsto \begin{cases} m & m \neq a, b \\ a & m = b \\ b & m = a \end{cases}$$

Permutationen der Form $\tau_{a,b}$ heißen *Transpositionen*.
2) Für $\pi \in S_n$ sei $a(\pi) := |\{(i,j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}|$ und

$$\mathrm{sign}(\pi) := (-1)^{a(\pi)}$$

heißt das *Signum* von π.

Lemma 2.13. *1) Für $\pi \in S_n$ gilt*

$$\mathrm{sign}(\pi) = \prod_{i<j} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

und

$$\mathrm{sign} : S_n \to \{1, -1\} : \pi \mapsto \mathrm{sign}(\pi)$$

ist ein Homomorphismus mit $\mathrm{sign}(\tau_{a,b}) = -1$ für alle $a, b \in \underline{n}, a \neq b$.
2) Jede Permutation $\pi \in S_n$ kann als Produkt (= Komposition) von Transpositionen geschrieben werden.

Beweis. 1) Jeder Faktor von $\prod_{i<j}(j - i)$ taucht bis aufs Vorzeichen auch als Faktor von $\prod_{i<j}(\pi(j) - \pi(i))$ auf und umgekehrt, wobei genau $a(\pi)$ Vorzeichenwechsel auftreten. Damit folgt der erste Teil der Behauptung. Seien nun $\pi, \sigma \in S_n$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{sign}(\pi \circ \sigma) & = & \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j))-\pi(\sigma(i))}{j-i} \\ & = & \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j))-\pi(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \\ & = & \prod_{i<j} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i} \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \\ & = & \mathrm{sign}(\pi)\,\mathrm{sign}(\sigma) \end{array}$$

2) Induktion über n: Für $n = 1$ ist alles richtig. Angenommen die Behauptung gilt für alle $\pi \in S_n$.
Sei nun $\pi \in S_{n+1}$. Falls $\pi(n + 1) = n + 1$, folgt die Behauptung wegen der Induktionsannahme. Falls $\pi(n + 1) = i \neq n + 1$, dann gilt $(\tau_{i,n+1} \circ \pi)(n + 1) = n + 1$ und wir können die Induktionsannahme auf $\tau_{i,n+1} \circ \pi$ anwenden und die Behauptung folgt wegen $\tau_{i,n+1}^2 = \mathrm{Id}_{\underline{n}}$. q. e. d.

Offensichtlich hat S_n nur endlich viele Elemente. Die erste Frage, die man stellt, wenn man es mit einer endlichen Gruppe G zu tun hat, ist die nach der *Ordnung* $|G|$ der Gruppe, also nach der Anzahl der Elemente von G.

Bemerkung 2.14.

$$|S_n| = n!$$

Beweis. Dies war Übung 5 in der LA I. Hier ist ein weiterer Beweis, der uns ein nützliches Korollar liefert. Betrachte die Abbildung

$$\Lambda : S_n \to \underline{n} : \pi \mapsto \pi(n).$$

Diese Abbildung ist surjektiv. Wenn wir noch zeigen, daß jede Faser $|S_{n-1}|$ Elemente hat, dann folgt die Behauptung durch Induktion, denn offensichtlich ist $|S_1| = 1$.
Klar: Die Faser $\Lambda^{-1}(\{n\})$ steht in offensichtlicher Bijektion mit S_{n-1}, kurz $\Lambda^{-1}(\{n\}) = S_{n-1}$. Weiter ist klar: $\Lambda^{-1}(\{i\}) = \tau_{i,n}S_{n-1} := \{\tau_{i,n} \circ \pi \mid \pi \in S_{n-1}\}$. Genauer:

$$S_{n-1} \to \Lambda^{-1}(\{i\}) : \pi \mapsto \tau_{i,n} \circ \pi$$

ist eine Bijektion, da $\tau_{i,n}$ als Element der Gruppe S_n invertierbar ist. Damit folgt die Behauptung.

Korollar 2.15.

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n} \tau_{i,n}S_{n-1}$$

wobei $\tau_{i,n}S_{n-1} \cap \tau_{j,n}S_{n-1} = \emptyset$ *für* $i \neq j$.

Später werden wir lernen, daß S_{n-1} eine Untergruppe von S_n ist und die $\tau_{i,n}S_{n-1}$ Restklassen nach dieser Untergruppe. Wir haben jetzt aber genügend Hilfsmittel aus der Gruppentheorie, um mit der Determinante fortfahren zu können.

Wir können jetzt erste Eigenschaften der Determinante beweisen, die zu einem Eindeutigkeitsbeweis führen.

Lemma 2.16. *Ist* $X \in V^n$ *und* $\pi \in S_n$, *so gilt*

$$\det(X \circ \pi) = \det(X)\operatorname{sign}(\pi).$$

Beweis. Für $\pi \in S_n$ sei

$$\ell(\pi) := \min\{k \mid \text{ Es existieren Transpositionen } \tau_1, \ldots, \tau_k \in S_n \text{ mit } \pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k\}.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion über die $\ell(\pi)$. Sei $X = (v_1, \dots, v_n)$. Die Behauptung ist klar, falls $\ell(\pi) = 0$. Im Falle $\ell(\pi) = 1$ ist π Transposition, sagen wir $\pi = \tau_{i,j}$. Setze

$$\tilde{X} : \underline{n} \to V : k \mapsto \begin{cases} v_k & k \neq i, j \\ v_i + v_j & k \in \{i, j\} \end{cases}$$

Dann ist

$$0 = \det(\tilde{X}) = 0 + 0 + \det(X) + \det(X \circ \pi)$$

und die Behauptung folgt für $\ell(\pi) = 1$.
Angenommen, die Behauptung gilt für alle $X \in V^n$ und $\ell(\pi) = k$. Sei nun $\pi \in S_n$ mit $\ell(\pi) = k + 1$, also $\pi = \tau \circ \pi'$ mit $\ell(\tau) = 1, \ell(\pi') = k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(X \circ \pi) &= \det((X \circ \tau) \circ \pi') \\ &= \det(X \circ \tau) \operatorname{sign}(\pi') \\ &= \det(X) \operatorname{sign}(\tau) \operatorname{sign}(\pi') \\ &= \det(X) \operatorname{sign}(\pi). \end{aligned}$$

q. e. d.

Satz 2.17. *Falls eine Determinante auf V mit Normierung bezüglich der Basis $B \in V^n$ existiert, ist sie eindeutig bestimmt. In anderen Worten, der Vektorraum $\Lambda^n(V^*)$ der alternierenden n-Formen auf V mit $n := \operatorname{Dim}(V)$ ist höchstens eindimensional.*

Beweis. Sei $X \in V^n$. Dann existiert eine eindeutige Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ mit $X = BA$. Seien $b_1, \dots, b_n$ die Spalten von B. Damit ist die j-te Spalte von X gerade $\sum_{k=1}^n a_{k,j} b_k$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \det(X) &= \det(\sum_{i_1} a_{i_1,1} b_{i_1}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n,n} b_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1} a_{i_1,1} \det(b_{i_1}, \sum_{i_2} a_{i_2,2} b_{i_2}, \dots, \sum_{i_n} a_{i_n,n} b_{i_n}) \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \det(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}). \end{aligned}$$

Nun summieren wir über alle Tupel $(i_1, \dots, i_n) \in \underline{n}^n$. Falls aber $i_x = i_y$ für $x \neq y$, dann ist $b_{i_x} = b_{i_y}$ und daher ist $\det(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = 0$. Daher genügt es nur über Tupel $(i_1, \dots, i_n) \in \underline{n}^n$ zu summieren, die einer Permutation in S_n entsrpechen. Also ist

$$\begin{aligned} \det(X) &= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} \det(B \circ \pi) \\ &= \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} \operatorname{sign}(\pi). \end{aligned}$$

Damit ist die Eindeutigkeit nachgewiesen. Die Normierung $\det(B) = 1$ haben wir nur an einer Stelle, und zwar im letzten Schritt gebraucht. Damit folgt dann auch

$\mathrm{Dim}(\Lambda^n(V^*)) = 1$. q. e. d.

Wir können die obige Formel für die Determinante auch umformulieren. Im Beweis von Satz 2.17 haben wir zu $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Matrix A so gewählt, dass die j-te Spalte von A genau $v_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} b_k$ erfüllt. Nun ist nach Satz 2.3 $v_j = \sum_{k=1}^n b_k^*(v_j) b_k$, also ist $a_{ij} = b_i^*(v_j)$. Daher erhalten wir auch die Formel

$$\boxed{\det = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) b^*_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes b^*_{\pi(n)}}$$

gegeben, wo $B^* \in (V^*)^n$ die Dualbasis zu B ist.

Der Beweis des Eindeutigkeitssatzes gibt uns auch einen Hinweis für den Existenzsatz. Wir können den Beweis nämlich so lesen: Wenn es überhaupt eine (bezüglich der Basis B normierte) Determinante gibt, dann ist sie durch obige Formel gegeben.

Satz 2.18. *Die Determinante auf V existiert. In anderen Worten, der Vektorraum $\Lambda^n(V^*)$ der alternierenden n-Formen auf V mit $n := \mathrm{Dim}(V)$ ist mindestens eindimensional.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die durch die obige Formel definierte Funktion det auf V^n die drei definierenden Eigenschaften der Determinante hat. Sofort klar sind die Multilinearität, denn jedes b_i^* ist linear, und die Normierungsbedingung, denn B eingesetzt liefert genau einen Summanden 1 und alle anderen Summanden gleich 0. Behauptung: det ist alternierend. Sei also $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ mit $v_i = v_j$ für ein Paar $i, j \in \underline{n}, i \neq j$. Wir brauchen nur zu zeigen, daß $\det(X) = 0$ gilt. In der Darstellung

$$\det(X) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) b^*_{\pi(1)}(X_1) \cdots b^*_{\pi(n)}(X_n)$$

vergleichen wir die beiden Summanden für $\pi \in S_n$ und $\pi \circ \tau_{i,j} \in S_n$. Beachte, daß diese beiden Permutationen verschieden sind, also wirklich zwei Summanden vorliegen. Beachte weiter, daß $X = X \circ \tau_{i,j}$ gilt, also

$$\prod_k b^*_{\pi(k)}(v_k) = \prod_k b^*_{\pi(k)}(v_{\tau_{i,j}(k)}) = \prod_\ell b^*_{\pi(\tau_{i,j}(\ell))}(v_l).$$

Andererseits aber gilt $\mathrm{sign}(\pi) = -\mathrm{sign}(\pi \circ \tau_{i,j})$. Also heben sich die beiden Summanden gegenseitig auf und die Gesamtsumme ist Null. q. e. d.

Wir können die Zerlegung der S_n in Restklassen nach S_{n-1} benutzen, um einen rekursiven Existenzbeweis, oder vom praktischen Gesichtspunkt aus gesehen, eine rekursive Methode zur Berechnung einer Determinante zu geben, die man Entwicklung nach der letzten Zeile nennt.

Satz 2.19. (Laplacescher Entwicklungssatz (*Entwicklung nach der ℓ-ten Spalte*)) *Sei $B \in V^n$ eine Basis von V und $k \in \underline{n}$. Für $i \in \underline{n}$ bezeichne ϵ_i die Abbildung*

$$\epsilon_i : \underline{n-1} \to \underline{n} : j \mapsto \begin{cases} j & j < i \\ j+1 & j \geq i \end{cases} .$$

Sei V_k der von $B \circ \epsilon_k = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots b_n)$ erzeugte Teilraum und Π_k die Projektion von V auf V_k bezüglich der Zerlegung $V = V_k \oplus \langle b_k \rangle$. Dann gilt für $\ell \in \underline{n}$

$$\det(X) = \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_\ell)(-1)^{k+\ell} \det(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_\ell))$$

wobei die Determinante links auf V definiert und bezüglich B normiert ist und die Determinante rechts auf V_k definiert und bezüglich der Basis $B \circ \epsilon_k$ normiert ist.

Bemerkung 2.20. Bevor wir uns den Beweis ansehen, schauen wir uns erst an, was dieser Satz aussagt. Sei also $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Wir wollen die bezüglich B normierte Determinante berechnen.

Definiere die Matrix A so, dass die j-te Spalte von A gerade ${}^B v_j$ ist, d.h. die j-te Spalte von A ist der Koordinatenvektor von v_j bezüglich der Basis B. Aus Satz 2.3 wissen wir, dass wir diesen Koordinatenvektor leicht mit Hilfe der Dualbasis ausdrücken können, denn ${}^B v_j = \begin{pmatrix} b_1^*(v_j) \\ \vdots \\ b_n^*(v_j) \end{pmatrix}$. Also ist die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ so, dass $a_{ij} = b_i^*(v_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$. Weiterhin ist $X \circ \epsilon_\ell = (v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \ldots, v_n)$. Nun wollen wir Π_k auf dieses $n-1$ Tupel anwenden. Dazu müssen wir zunächst die Zerlegung $V = V_k \oplus \langle b_k \rangle$ betrachten und jedes v_i auf V_k projezieren. Die Projektion von v_i auf V_k kann man aber ganz leicht an dem Koordinatenvektor ${}^B v_j$ ablesen, denn es ist der Vektor, der die k-te Komponente auslässt.

Insbesondere, wenn wir den Laplaceschen Entwicklungssatz auf die Spalten von A anwenden, so lautet die Entwicklung nach der ℓ-ten Spalte:

$$\det((A_{-,1}, \ldots, A_{-,n})) = \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell}(-1)^{k+\ell} \det(A^{k\ell}),$$

wobei $A^{k\ell}$ die Folge von Spalten von A ist die entsteht, wenn wir die ℓ-te Spalte von A weglassen und die k-te Zeile von jeder Spalte von A streichen.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass aus der Formel zur Entwicklung nach der ersten Spalte auch die Formel zur Entwicklung nach der i-ten Spalte folgt, für $1 \leq i \leq n$. Sei also

$$\det(X) = \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} \det(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1)),$$

denn dann ist für $\pi \in S_n$ mit $\pi(1) = i$ und $\pi(j) = j-1$ für $j \in \{2, \ldots, i\}$ nach Lemma 2.16 $\det(X \circ \pi) = \det(X)\operatorname{sign}(\pi) = \det(X)(-1)^{i-1}$ (siehe auch Präsenzübung 6 Aufgabe 2) und

$X \circ \pi \circ \epsilon_1 = X \circ \epsilon_i$. Also

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}\det(X) = \det(X \circ \pi) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_i)(-1)^{k+1}\det(\Pi_k \circ X \circ \pi \circ \epsilon_1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_i)(-1)^{k+1}\det(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_i).\end{aligned}$$

Multiplikation beider Seiten mit $(-1)^{i-1}$ liefert die Formel.

Wir zeigen nun, per Induktion nach n, dass wir die Determinante durch Entwicklung nach der ersten Spalte berrechnen können. Wir nehmen also an, dass für $n-1$ und $X' \in V^{n-1}$ gilt dass

$$\det(X') = \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_i)(-1)^{k+i}\det(\Pi_k \circ X' \circ \epsilon_i)$$

normiert bezüglich der Basis $B' = B \circ \varepsilon_k$.

Da wir bereits wissen, dass die Determinante existiert und eindeutig ist, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$d_n : V^n \to K : X \mapsto \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1}\det(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1)$$

eine bezüglich B normierte Determinante ist, denn dann ist $d_n = \det$.

$n = 2$: Wir haben bereits nachgewiesen, dass $\det(X) = b_1^*(v_1)b_2^*(v_2) - b_1^*(v_2)b_2^*(v_1)$. Sei nun $n > 2$ und die Behauptung gelte für d_{n-1}. Sei also d_{n-1} eine bezüglich $B \circ \epsilon_1$ normierte Determinante.

Sei nun $r \in \underline{n}$ und $a \in K$. Seien $X = (v_1, \ldots, v_n)$ und $X' = (v_1, \ldots, v_{r-1}, v'_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ und $Y = (v_1, \ldots, v_{r-1}, av_r + bv'_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$. Wir entwickeln nach der 1-ten Spalte.

Wir betrachten zuerst den Fall $r = 1$. Dann ist $Y = (av_1 + bv'_1, v_2, \ldots, v_n)$ und $Y \circ \epsilon_1 = (v_2, \ldots, v_n) = X \circ \epsilon_1 = X' \circ \epsilon_1$. Also folgt aus der Linearität der b_k^*

$$\begin{aligned}d_n(Y) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(av_1 + bv'_1)(-1)^{k+1}d_n(\Pi_k \circ Y \circ \epsilon_1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(ab_k^*(v_1) + bb_k^*(v'_1))(-1)^{k+1}d_n(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) \\ &= a\sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1}d_n(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) + b\sum_{k=1}^{n} b_k^*(v'_1)(-1)^{k+1}d_n(\Pi_k \circ X' \circ \epsilon_1) \\ &= ad_n(X) + bd_n(X').\end{aligned}$$

Nun sei $r > 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
d_n(Y) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} d_n(\Pi_k \circ Y \circ \epsilon_1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} \left(a d_n(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) + b d_n(\Pi_k \circ X' \circ \epsilon_1)\right) \\
&= a \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} d_n(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) + b \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} d_n(\Pi_k \circ X' \circ \epsilon_1) \\
&= a d_n(X) + b d_n(X').
\end{aligned}$$

Sei nun $X = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_k = v_j$ für $k < j$. Falls $k > 1$ entwickeln wir nach der 1-ten Spalte.

$$\begin{aligned}
d_n(X) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} d_{n-1}(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} 0 = 0,
\end{aligned}$$

da d_{n-1} alternierend und $\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1$ auch zwei identische Elemente hat, ist $0 = d_n(X) = d_n(X)\,\mathrm{sign}(\pi)$, d.h. $d_n(X) = 0$.

Es bleibt der Fall $k = 1$. Da d_{n-1} nach Induktionsvoraussetzung eine Determinante ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung der Laplacesche Entwicklungssatz für d_{n-1} nach einer beliebigen Spalte. Wir verwenden ihn für die $j-1$-te Spalte von $\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1$, was der j-ten Spalte von $\Pi_k \circ X$, also $\Pi_k(v_j)$, entspricht. Weiter verwenden wir, dass $v_j = v_1$. Setze $Y_{\ell,k,j} = \Pi_\ell \circ \Pi_k \circ X \circ \epsilon_1 \circ \epsilon_{j-1}$.

$$\begin{aligned}
d_n(X) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} d_{n-1}(\Pi_k \circ X \circ \epsilon_1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(v_1)(-1)^{k+1} \sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} b_\ell^*(v_j)(-1)^{\ell+j-1} d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{n} (-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} (-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k+1}^{n} (-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, denn für jedes Paar (k, ℓ) mit $\ell < k$ in der ersten Summe, gibt es ein Paar (ℓ, k) mit $\ell < k$ in der zweiten Summe. Die zu diesen Paaren korrespondierende Summanden sind addieren zu 0:

Der Summand, der zu (ℓ, k) in der zweiten Summe korrespondiert ist

$$\begin{aligned}
(-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}) &= (-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{\ell,k,j}\tau_{\ell,k})\,\mathrm{sign}(\tau_{\ell,k}) \\
&= -(-1)^{k+\ell+j} b_k^*(v_1) b_\ell^*(v_1) d_{n-2}(Y_{k,\ell,j}),
\end{aligned}$$

ist also das Negative des Summandes der ersten Summe, der zu (k, ℓ) korrespondiert. Man beachte, dass wir Lemma 2.16 für d_{n-2} verwendet haben, was nach Induktionsvoraussetzung eine Determinante ist.

Weiter ist

$$\begin{aligned} d_n(B) &= \sum_{k=1}^{n} b_k^*(b_1)(-1)^{k+1} d_{n-1}(\Pi_k \circ B \circ \epsilon_1) \\ &= (-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

Also ist d_n eine bezüglich B normierte Determinante. Da die Determinante eindeutig ist, ist $\det = d_n$.

q. e. d.