Übung: Zeige umgekehrt, daß bei endlich erzeugten Vektorräumen V zu jeder Basis D von V^* eine eindeutige Basis B von V existiert mit $B^* = D$.

Bemerkung 2.4. In unserer Identifikation von $(K^{n\times 1})^*$ mit $K^{1\times n}$ ist die Dualbasis der Standardbasis von $K^{n\times 1}$ die Standardbasis von $K^{1\times n}$. Ebenso klar: Sind die Spalten von $A \in K^{n\times n}$ eine Basis B von $K^{n\times 1}$, so liefern die Zeilen von $A^{-1} \in K^{n\times n}$ die Dualbasis B^* von B:

$$A^{-1}_{i,-}A_{-,j} = \delta_{ij}.$$

Etwas formeller halten wir fest:

Satz 2.5. *Seien $B, C \in V^n$ Basen von V. Dann gilt:*

$${}^{C^*}\operatorname{Id}_{V^*}^{B^*} = ({}^{B}\operatorname{Id}_{V}^{C})^{tr},$$

d.h.

$${}^{B^*}\operatorname{Id}_{V^*}^{C^*} = (({}^{B}\operatorname{Id}_{V}^{C})^{tr})^{-1}.$$

<u>Beweis.</u> Übung. (Zeige auch $(A^{-1})^{tr} = (A^{tr})^{-1}$ für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, was die Bezeichnung A^{-tr} für diese Matrix rechtfertigt.) q. e. d.

Wie sieht es mit Teilräumen aus? Man kann nachzurechnen, dass $\mathbb{F}_2^3$ sowohl 7 eindimensionale als auch 7 zweidimensionale Teilräume hat. Ist dies eine zufällige Koinzidenz oder liegt der Spezialfall eines allgemeinen Phänomens vor?

Satz 2.6.

1. *Ist $U \leq V$, so ist der Annihilator $U^\perp$ von U definiert durch*

   $$U^\perp := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

   ein Teilraum von V^*.

2. *Ist V endlich erzeugt, so gilt:* $\operatorname{Dim}(U) + \operatorname{Dim}(U^\perp) = \operatorname{Dim}(V)$ *oder besser*

   $$U^* \cong V^*/U^\perp.$$

3. *Ist V endlich erzeugt, so ist*

   $$^\perp : \mathcal{TR}(V) := \{U \mid U \leq V\} \to \mathcal{TR}(V^*) : U \mapsto U^\perp$$

   eine bijektive Abbildung mit

   $$U \subseteq T \text{ genau dann, wenn } T^\perp \subseteq U^\perp.$$

Beweis.

1. $V^* \to U^* : \varphi \mapsto \varphi_{|U}$ ist eine lineare Abbildung mit Kern $U^\perp$.

2. Ist $(b_1, \ldots, b_d)$ eine Basis von U und $(b_1, \ldots, b_d, \ldots b_n)$ eine Basis von V, so ist die Dualbasis $(b_1^*, \ldots, b_n^*) \in (V^*)^n$ eine Basis von V^*. Wir zeigen, dass $(b_{d+1}^*, \ldots, b_n^*) \in (V^*)^{n-d}$ eine Basis von $U^\perp$ ist:
   Zunächst ist $b_j^* \in U^\perp$ für $d+1 \leq j \leq n$, da $b_j^*(b_k) = 0$ für $1 \leq k \leq d$, d.h. $b_j^*(u) = 0$ für alle $u \in U$. Sei andererseits $\varphi \in U^\perp$ mit $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*$ mit $a_i \in K$ dann ist insbesondere $\varphi(b_k) = 0$ für $1 \leq k \leq d$. Also $0 = \varphi(b_k) = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*(b_k) = a_k$, d.h. $\varphi = \sum_{i=d+1}^n a_i b_i^* \in \langle b_{d+1}^*, \ldots, b_n^* \rangle$.
   Weiterhin ist sofort klar, dass $b_{k|U}^* \in U^*$ und da $\mathrm{Dim}(U^*) = \mathrm{Dim}(U)$ folgt dass $(b_{1|U}^*, \ldots, b_{d|U}^*) \in (U^*)^d$ eine Basis von U^* ist. Hieraus folgt die Dimensionsformel und man sieht auch die Surjektivität der Abbildung aus 1). Also mit Hilfe des Homomorphiesatzes folgt auch $U^* \cong V^*/U^\perp$.

3. Um zu zeigen, dass die Abbildung bijektiv ist definieren wir:

$$^\intercal : \mathcal{TR}(V^*) \to \mathcal{TR}(V) : U \mapsto U^\intercal := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0 \text{ für alle } \varphi \in U\}.$$

   Wir zeigen, daß $^\intercal$ rechts- und linksinvers zu $^\perp$ ist, d.h.

$$(U^\perp)^\intercal = U \text{ für alle } U \leq V$$

   und

$$(U^\intercal)^\perp = U \text{ für alle } U \leq V^*.$$

   Zunächst beweist man analog zu der ersten Dimensionsformel für $W \leq V^*$ (Übung):

$$\mathrm{Dim}(W^\intercal) + \mathrm{Dim}(W) = \mathrm{Dim}(V).$$

   Sei also $(b_1^*, \ldots, b_d^*, \ldots, b_{d+1}^*, \ldots, b_n^*)$ eine Basis von V^*, so dass $(b_1^*, \ldots, b_d^*)$ eine Basis von W ist. Wir zeigen, dass $(b_{d+1}, \ldots, b_n)$ eine Basis von $W^\intercal$ ist:

   Es ist $b_i^*(b_j) = 0$ für $1 \leq i \leq d$ und $d+1 \leq j \leq n$. Also $\varphi(b_j) = 0$ für alle $\varphi \in \langle b_1^*, \ldots, b_d^* \rangle = W$. Also $b_j \in W^\intercal$ für $d+1 \leq j \leq n$.

   Sei andererseits $w \in W^\intercal$. Dann ist $b_i^*(w) = 0$ für $1 \leq i \leq d$. Sei also $w = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Dann ist $0 = b_i^*(w) = a_i$ für $1 \leq i \leq d$, also $w \in \langle b_{d+1}, \ldots, b_n \rangle$.

   Folgende Inklusionen sind sofort klar:

$$(U^\perp)^\intercal \supseteq U \text{ für alle } U \leq V$$

   und analog

$$(W^\intercal)^\perp \supseteq W \text{ für alle } W \leq V^*.$$

   Aus Dimensionsgründen bekommen wir aber in beiden Fällen Gleichheit. Z. B. im ersten Fall:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}((U^\perp)^\intercal) &= \mathrm{Dim}(V) - \mathrm{Dim}(U^\perp) \\ &= \mathrm{Dim}(V) - (\mathrm{Dim}(V) - \mathrm{Dim}(U)) \\ &= \mathrm{Dim}(U), \end{aligned}$$

also $(U^\perp)^\intercal = U$. Also haben wir eine Bijektion.
Im Hinblick auf die Inklusionsumkehrung ist klar: $U, T \in \mathcal{TR}(V)$ mit $U \subseteq T$ impliziert $T^\perp \subseteq U^\perp$. Ebenso: $U, T \in \mathcal{TR}(V^*)$ mit $U \subseteq T$ impliziert $T^\intercal \subseteq U^\intercal$. Da $(U^\perp)^\intercal = U$, folgt aus $U, T \in \mathcal{TR}(V)$ mit $T^\perp \subseteq U^\perp$ auch wieder $U, T \in \mathcal{TR}(V)$.

q. e. d.

Wir bekommen einen weiteren Beweis, daß Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen. Gleichzeitig bekommen wir eine neue Sichtweise für (homogene) lineare Gleichungssysteme.

Korollar 2.7. *Sei $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt:*
$\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\varphi_A)) +$ *Zeilenrang*$(A) = n$. *Insbesondere ist Zeilenrang*$(A) =$ *Spaltenrang*(A).

<u>Beweis.</u> Im Rahmen unserer Identifikation von $(K^{n\times 1})^*$ mit $K^{1\times n}$ haben wir mit $Z(A) :=$ Zeilenraum von A:

$$\mathrm{Kern}(\varphi_A) = Z(A)^\intercal,$$

woraus $\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\varphi_A)) + \mathrm{Dim}(Z(A)) = n$ folgt.
Weiter haben wir für den Spaltenraum $S(A) = \mathrm{Bild}(\varphi_A)$ nach dem Homomorphiesatz:

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\varphi_A)) + \mathrm{Dim}(S(A)) = n.$$

q. e. d.

Unser nächstes Thema sind lineare Abbildung im Kontext mit Dualräumen. Wir sehen, dass eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ nicht nur eine lineare Abbildung $\varphi_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1} : S \mapsto AS$ definiert, sondern auch eine lineare Abbildung $\varphi_A^{tr} : K^{1\times m} \to K^{1\times n} : Z \mapsto ZA$. Das Assoziativgesetz liest sich dann so:

$$(ZA)S = Z(AS), \text{ d. h. } \varphi_A^{tr}(Z) \cdot S = Z \cdot \varphi_A(S)$$

für alle $Z \in K^{1\times m}, S \in K^{n\times 1}$. Diesen Vorgang übertragen wir jetzt auf beliebige endlich dimensionale Vektorräume.

Definition 2.8. Seien V, W endlich erzeugte K-Vektorräume und $\alpha : V \to W$ linear. Dann heißt

$$\alpha^{tr} : W^* \to V^* : \psi \mapsto \psi \circ \alpha$$

die zu α **transponierte lineare Abbildung**.

Klar: Wir haben das kommutative Diagramm:

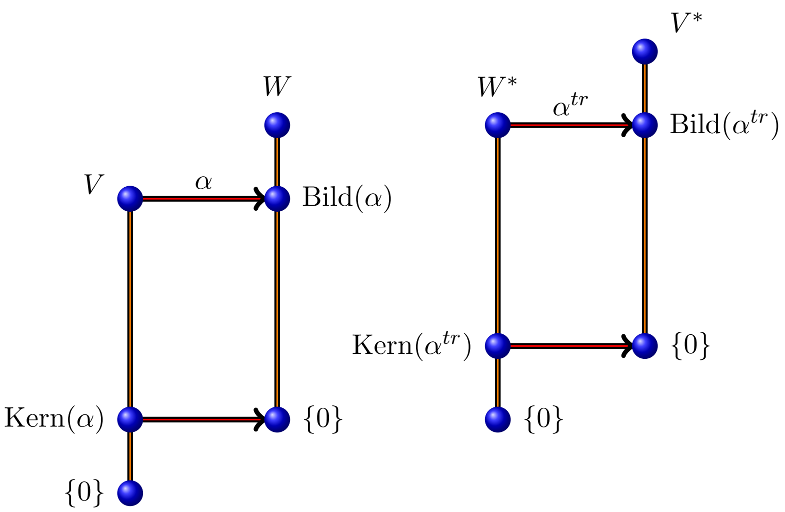
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ \alpha^{tr}(\psi) & \searrow & \downarrow \psi \\ & & K \end{array}$$

Satz 2.9. *Sei $\alpha : V \to W$ linear mit V, W endlich erzeugt.*
1) $\alpha^{tr} : W^* \to V^*$ ist linear.
2) Sind $B \in V^n$ und $C \in W^m$ Basen, so gilt für die Matrix von α^{tr} bezüglich der dualen Basen $C^* \in (W^*)^m$ und $B^* \in (V^*)^n$:

$${}^{B^*}(\alpha^{tr})^{C^*} = ({}^{C}\alpha^{B})^{tr}.$$

3) Es gilt

$$(\mathrm{Kern}(\alpha))^\perp = \mathrm{Bild}(\alpha^{tr}) \text{ und } (\mathrm{Bild}(\alpha))^\perp = \mathrm{Kern}(\alpha^{tr}).$$



Beweis. 1) Für $\psi_1, \psi_2 \in W^*$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha^{tr}(\psi_1 + \psi_2) &= (\psi_1 + \psi_2) \circ \alpha \\ &= \psi_1 \circ \alpha + \psi_2 \circ \alpha \\ &= \alpha^{tr}(\psi_1) + \alpha^{tr}(\psi_2) \end{aligned}$$

Skalare: Übung.
2) Sei $B^* \in (V^*)^n$ die Dualbasis zu B von V^* und $B^{**} \in ((V^*)^*)^n$ die Dualbasis zu B^* von $(V^*)^*$, also die Bidualbasis. D. h. wir haben

$$b_i^{**}(b_j^*) = \delta_{ij} = b_j^*(b_i) \text{ für alle } i, j \in \underline{n}.$$

Nun steht nach Definition der Matrix einer linearen Abbildung in der j-ten Spalte von ${}^{B^*}(\alpha^{tr})^{C^*}$ der Koordinatenvektor von $\lambda_j := \alpha^{tr}(c_j^*)$ bezüglich der Basis B^*. Dieser Koordinatenvektor lässt sich aber mit Satz 2.3 sehr leicht mit Hilfe der Dualbasis von B^*, also mit Hilfe der Bidualbasis B^{**}, ausrechnen, da

$$\lambda_j = b_1^{**}(\lambda_j)b_1^* + \cdots , b_n^{**}(\lambda_j)b_n^*.$$

Damit ist dann klar, dass $({}^{B^*}(\alpha^{tr})^{C^*})_{ij} = b_i^{**}(\lambda_j)$. Sei $\lambda_j = a_1 b_1^* + \cdots + a_n b_n^*$. Dann ist mit obiger Bemerkung

$$b_i^{**}(\lambda_j) = b_i^{**}(a_1 b_1^* + \cdots + a_n b_n^*) = a_1 b_i^{**}(b_1^*) + \cdots + a_n b_i^{**}(b_n^*) = a_i = \lambda_j(b_i).$$

Weiterhin ist $\lambda_j = \alpha^{tr}(c_j^*) = c_j^* \circ \alpha$. Also sehen wir, dass

$$\begin{aligned} ({}^{B^*}(\alpha^{tr})^{C^*})_{ij} &= b_i^{**}(\lambda_j) = b_i^{**}(\alpha^{tr}(c_j^*)) \\ &= (c_j^* \circ \alpha)(b_i) = c_j^*(\alpha(b_i)) \\ &= ({}^{C}(\alpha)^{B})_{ji}. \end{aligned}$$

3) Sei $(c_1, \ldots, c_r) \in W^r$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\alpha)$ und $C = (c_1, \ldots, c_r, \ldots c_m) \in W^m$ eine Basis von W. Dann existieren eindeutige $\phi_1, \ldots, \phi_r \in V^*$ mit

$$\alpha : V \to W : v \mapsto \phi_1(v)c_1 + \ldots + \phi_r(v)c_r$$

(siehe Übung).

Beh.: $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ ist linear unabhängig.

Beweis: Falls nicht, können wir OBdA annehmen, daß $\phi_1 = \sum_{i=2}^r a_i \phi_i$. Dann ist aber

$$\alpha(v) = \phi_2(v)(c_2 + a_2 c_1) + \ldots + \phi_r(v)(c_r + a_r c_1)$$

im Widerspruch zu der Annahme, daß $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(\alpha)) = r$ ist.

Also können wir $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ zu einer Basis $B^* \in (V^*)^n$ ergänzen, also $b_i^* = \phi_i$ für $i = 1, \ldots, r$. Sei $B \in V^n$ die Basis, zu der B^* die Dualbasis ist. Dann haben wir

$$\alpha(b_i) = \begin{cases} c_i & i \leq r \\ 0 & i > r \end{cases}$$

und wegen 2)

$$\alpha^{tr}(c_j^*) = \begin{cases} b_j^* & j \leq r \\ 0 & j > r \end{cases} .$$

Nun ist

$$\mathrm{Kern}(\alpha) = \langle b_{r+1}, \ldots, b_n \rangle$$

also

$$(\mathrm{Kern}(\alpha))^\perp = \langle b_1^*, \ldots, b_r^* \rangle = \mathrm{Bild}(\alpha^{tr}).$$

Ebenso $\mathrm{Bild}(\alpha) = \langle c_1, \ldots, c_r \rangle$, also

$$(\mathrm{Bild}(\alpha))^\perp = \langle c_{r+1}^*, \ldots, c_n^* \rangle = \mathrm{Kern}(\alpha^{tr}).$$

q. e. d.

2.2 Determinanten

Lernziele 6.

- *Definition und Beispiele von Multilinearformen,*
- *Determinante,*
- *Berechnungsverfahren und Anwendungen,*
- *Volumenverzerrung, charakteristisches Polynom.*

Wir wollen in diesem Abschnitt Determinanten einführen. Sie sind wichtige Werkzeuge der Theorie und haben viele Anwendungen auch außerhalb der linearen Algebra.

Definition 2.10. Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und $B \in V^n$ eine Basis von V. Die (bezüglich B normierte) *Determinante* von V ist eine Abbildung

$$\det : V^n \to K : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, \ldots, v_n)$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

1. det ist **multilinear**, d. h.

$$\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, a v_i + b v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) = \\ a \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) + b \det(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

   für alle $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ und $v_i' \in V$ für $1 \leq i \leq n$.

2. det ist **alternierend**, d. h. $\det(X) = 0$ für alle $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, für die $i, j \in \underline{n}, i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$, (also nicht injektive $X \in V^n$).

3. det ist **normiert**, d.h. $\det(B) = 1$.

***Beispiel* 2.11.** 1) Für $V = K$ mit Basis $B = (1)$ ist $\det = \mathrm{Id}_K$.
2) Für $V = K^{2\times 1}$ mit der Standardbasis S als Basis B ist

$$\det(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

(Beweis: Übung).
3) Ist V beliebig mit Basis $B \in V^n$, so kann man mit der Dualbasis $B^* \in (V^*)^n$ verschiedene Multilinearformen konstruieren. Z. B.

$$b_1^* \otimes b_2^* \otimes \ldots \otimes b_n^* : V^n \to K : X \mapsto b_1^*(X_1) b_2^*(X_2) \cdots b_n^*(X_n)$$

ist multilinear und normiert, aber für $n > 1$ nicht alternierend;

$$b_1^* \otimes b_2^* \otimes b_3^* \otimes \ldots \otimes b_n^* - b_2^* \otimes b_1^* \otimes b_3^* \otimes \ldots \otimes b_n^*$$

ist multilinear, normiert, aber nur in Bezug auf die ersten beiden Komponenten alternierend.

Wir werden im Folgenden zwei Aussagen über eine Determinante beweisen: Nachweis der Eindeutigkeit und Nachweis der Existenz. Zum Nachweis der Eindeutigkeit, der gleichzeitig eine Idee vermittelt, wie man eine Determinante ausrechnet, brauchen wir etwas Vorbereitung aus der Gruppentheorie.

Exkurs in die Gruppentheorie der symmetrischen Gruppe

Es sei daran erinnert, daß Homomorphismen von einer Gruppe in eine andere Abbildungen sind, die mit der Multiplikation (und damit auch mit dem Invertieren) vertauschbar sind. Den Homomorphismus, den wir später benötigen, ist der folgende:

Definition 2.12. 1) Eine *Permutation* der Menge M ist ein Element der symmetrischen Gruppe S_M. Für $a, b \in M, a \neq b$ bezeichnet $\tau_{a,b}$ die Permutation

$$\tau_{a,b} : M \to M : m \mapsto \begin{cases} m & m \neq a, b \\ a & m = b \\ b & m = a \end{cases}$$

Permutationen der Form $\tau_{a,b}$ heißen *Transpositionen*.
2) Für $\pi \in S_n$ sei $a(\pi) := |\{(i, j) \in \underline{n} \times \underline{n} \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}|$ und

$$\operatorname{sign}(\pi) := (-1)^{a(\pi)}$$

heißt das *Signum* von π.