1.4 Orthogonale Gruppe

Lernziele 4.

- *Orthogonale Abbildungen,*
- *orthogonale Gruppe,*
- *Spieglungen,*
- *Invarianten der orthogonalen Gruppe,*
- *Polarzerlegung.*

Bemerkung 1.36. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V^n$.
1) Für jedes $C = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(b_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung φ ist genau dann ein Automorphismus, also bijektiv, wenn C auch eine Basis von V ist. Die Automorphismen von V bilden eine Untergruppe $\mathrm{GL}(V)$ von der Gruppe S_V aller bijektiven Abbildungen von V nach V, genannt die **volle** oder *generelle lineare Gruppe* von V.
2) Die Abbildung

$$\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n, K) : \varphi \mapsto {}^B\varphi^B$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen, also eine bijektive Abbildung, die das Produkt überträgt:

$${}^B(\varphi \circ \psi)^B = {}^B\varphi^B \cdot {}^B\psi^B$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$.
3) $\mathrm{GL}(V)$ operiert auf V^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\mathrm{GL}(V) \times V^k \to V^k : (\varphi, X) \mapsto \varphi X = \varphi(v_1, \ldots, v_k) := (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)).$$

Trennende Invariante dieser Operation sind die linearen Abhängigkeiten, genauer

$$\Lambda : V^k \to \mathcal{TR}(K^{k\times 1}) : X \mapsto \mathrm{Kern}(\lambda_X)$$

mit $X = (v_1, \ldots, v_k)$ und

$$\lambda_X : K^{k\times 1} \to V : a \mapsto Xa := a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k.$$

4) $\mathrm{GL}(V)$ operiert auf der Menge $\mathcal{TR}(V)$ der Teilräume von V durch

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathcal{TR}(V) \to \mathcal{TR}(V) : (\varphi, T) \mapsto \varphi T := \{\varphi T \mid T \in T\}$$

mit Dimension als trennender Invariante, genauer

$$\mathrm{Dim} : \mathcal{TR}(V) \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : T \mapsto \mathrm{Dim}(T).$$

Beweis. 1) und 2) sind sehr leichte Übungen, 3) eine anspruchsvollere Übung. Wir zeigen 4): Daß eine Operation vorliegt ist leicht zu verifizieren, ebenso daß Dim eine Invariante dieser Operation ist, da Basen auf Basen abgebildet werden. Daß diese Invariante bahntrennend ist, liegt am Basisergänzungssatz: Seien $T, U \leq V$ von gleicher Dimension k und $X \in T^k, Y \in U^k$ Basen von T bzw. U. Dann existieren Fortsetzungen

$$X^e = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}^e, \ldots v_n^e), Y^e = (w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}^e, \ldots w_n^e) \in V^n,$$

welche Basen von V sind. Nach 1) existiert somit ein eindeutiges $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\varphi X^e = Y^e$. Es folgt $\varphi T = U$. q. e. d.

Wir hatten bereits orthogonale Abbildungen definiert und festgestellt, daß die orthogonalen Abbildungen eines EUKLIDischen Vektorraumes (V, Φ) eine Untergruppe $\mathrm{O}(V, \Phi)$ von $\mathrm{GL}(V)$ bilden. Hier ist nochmals eine leicht abgewandelte Charakterisierung und eine Beschreibung diverser Bahnen von $\mathrm{O}(V, \Phi)$ in Analogie zu $\mathrm{GL}(V)$. Die nachfolgende Bemerkung steht in Analogie zu Bemerkung 1.36 über $\mathrm{GL}(V)$.

Bemerkung 1.37. Sei (V, Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V^n$.
1) Für jedes $C = (c_1, \ldots, c_n) \in V^n$ gibt es genau einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(b_i) = c_i$ für $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung φ ist genau dann orthogonal, wenn die GRAMmatrizen von B und C gleich sind: $\Phi(b_i, b_j) = \Phi(c_i, c_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$. Die orthogonalen Abbildungen von V bilden eine Untergruppe $\mathrm{O}(V) = \mathrm{O}(V, \Phi)$ von $\mathrm{GL}(V)$, genannt die *orthogonale Gruppe* von V:

$$\mathrm{O}(V, \Phi) = \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid \Phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

2) Ist B eine ONBasis von V, so ist die Abbildung

$$\mathrm{O}(V) \to \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) : \varphi \mapsto {}^B\varphi^B$$

ein Isomorphismus von Gruppen, also eine bijektive Abbildung, die das Produkt überträgt:

$${}^B(\varphi \circ \psi)^B = {}^B\varphi^B \cdot {}^B\psi^B$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{O}(V)$.
3) $\mathrm{O}(V)$ operiert auf V^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\mathrm{O}(V) \times V^k \to V^k : (\varphi, X) \mapsto \varphi X = \varphi(v_1, \ldots, v_k) := (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)).$$

Trennende Invariante dieser Operation sind die GRAMmatrizen, genauer

$$\Gamma : V^k \to \mathbb{R}_{sym}^{k \times k} : X \mapsto (\Phi(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

4) $\mathrm{O}(V)$ operiert auf der Menge $\mathcal{TR}(V)$ der Teilräume von V durch

$$\mathrm{O}(V) \times \mathcal{TR}(V) \to \mathcal{TR}(V) : (\varphi, T) \mapsto \varphi T := \{\varphi T \mid T \in T\}$$

mit Dimension als trennender Invariante, genauer

$$\mathrm{Dim} : \mathcal{TR}(V) \to \mathbb{Z}_{\geq 0} : T \mapsto \mathrm{Dim}(T).$$

Beweis. 1) und 2) sind Übungen, 3): Daß Γ eine Invariante ist, ist klar. Wir zeigen, daß sie die Bahnen trennt: Seien also $X, Y \in V^k$ mit $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. Wir wenden das GRAM-SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren sowohl auf X als auf Y an und erhalten eine ONBasis $E = (e_1, \ldots, e_k)$ von $\langle X \rangle$ und $F = (f_1, \ldots, f_k)$ von $\langle Y \rangle$. Hierbei ist zweierlei zu beachten: Da X und Y nicht notwendig linear unabhängig sind, kann es passieren, daß man im Orthogonalisierungsverfahren zwischendurch den Nullvektor statt eines neuen Basisvektors bekommt. Die Koeffizienten, mit deren Hilfe sich E aus X bzw. F aus Y linearkombiniert, sind gleich, da sie nur von den Skalarprodukten abhängen und wir $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$ vorausgesetzt haben. Umgekehrt gibt es dann auch eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{r \times k}$ mit $r := \operatorname{Rg}(\Gamma(X))$, die diese Linearkombination beschreibt, d.h. für die $EM = X$ und $FM = Y$. Wegen $E, F \in V^r$ orthonormal, gibt es offenbar ein $\varphi \in \mathrm{O}(V)$ mit $\varphi(e_i) = f_i$. Es folgt φ bildet X auf Y ab.
4): Folgt aus der Existenz der ONBasen für Teilräume. q. e. d.

Unter den orthogonalen Transformationen wollen wir insbesondere die Spieglungen hervorheben:

Definition 1.38. Eine orthogonale Transformation $\varphi \in \mathrm{O}(V)$ heißt *Orthogonalspieglung* oder manchmal einfach *Spieglung*, falls das Minimalpolynom von φ gleich $X^2 - 1$ ist und der Eigenraum zum Eigenwert -1 eindimensional ist: $\operatorname{Dim} E_\varphi(-1) = 1$.

Übung: Sei $\pi \in \operatorname{End}(V)$ Orthogonalprojektion mit $\operatorname{Dim} \operatorname{Bild}(\pi) = 1$, dann ist $\operatorname{Id}_V - 2\pi$ eine Orthogonalspieglung. Beweise auch, daß Spieglungen hierdurch charakterisiert sind.

Wir können jetzt alle orthogonalen Abbildungen eines zweidimensionalen EUKLIDischen Vektorraums beschreiben.

***Beispiel* 1.39.** Sei $\operatorname{Dim}(V) = 2$.
Aufgabe: Beschreibe alle orthogonalen Transformationen von V.
Lösung: Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine ONBasis und $\gamma \in \mathrm{O}(V, \Phi)$. Nach Satz 1.35 haben wir folgende Möglichkeiten für das Minimalpolynom von γ:
1) $X - 1$ oder $X + 1$, d.h. $\gamma = \operatorname{Id}_V$ bzw. $\gamma = -\operatorname{Id}_V$.
2) $(X - a)^2 + b^2$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Man beachte $\operatorname{Spur}(\gamma) = 2a$ und $b \neq 0$. Lemma 1.32 sagt uns in diesem Fall ${}^B\gamma^B = aI_2 + bi$, wobei b aber nur bis aufs Vorzeichen festgelegt ist. (In der Tat, ersetzt man b_2 durch $-b_2$, dann ändert sich das Vorzeichen.)
3) $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, d.h., γ ist Spieglung und $\operatorname{Spur}(\gamma) = 0$. Man kann B als Eigenvektorbasis wählen. Aber wir wollen nur annehmen, daß B eine beliebige ONBasis von V ist.
Wir behandeln die Fälle 2) und 3) simultan vom geometrischen Standpunkt aus: Es gibt einen eindeutigen Winkel $\nu \in [0, \pi]$ mit $\Phi(b_1, \gamma(b_1)) = \cos(\nu)$. Damit haben wir den ersten FOURIERkoeffizienten von $\gamma(b_1)$. Wegen

$$\Phi(\gamma(b_1), \gamma(b_1)) = 1$$

haben wir für den zweiten FOURIERkoeffizienten nur zwei Möglichkeiten: $\sin(\nu)$ oder $-\sin(\nu)$. Indem wir erlauben, daß $\nu \in [0, 2\pi)$ liegt, haben wir:

$$\gamma(b_1) = \cos(\nu)b_1 + \sin(\nu)b_2 \text{ für ein eindeutiges } \nu \in [0, 2\pi)$$

Da $\gamma(b_2)$ auch Länge 1 hat und orthogonal zu $\gamma(b_1)$ ist, bleiben für $\gamma(b_2)$ nur die folgenden zwei Möglichkeiten:

$$\gamma(b_2) = -\sin(\nu)b_1 + \cos(\nu)b_2$$

oder

$$\gamma(b_2) = \sin(\nu)b_1 - \cos(\nu)b_2$$

in anderen Worten

$$^B\gamma^B = \begin{pmatrix} \cos(\nu) & -\sin(\nu) \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix} \text{ oder } ^B\gamma^B = \begin{pmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ \sin(\nu) & -\cos(\nu) \end{pmatrix}$$

Die erste Möglichkeit entspricht den Fällen 1) und 2) für das Minimalpolynom oben. Man spricht von einer *Drehung* um den Winkel ν. Beachte $a = \cos(\nu), b = \sin(\nu)$. Der Drehwinkel ist nur zusammen mit der ONBasis B festgelegt: Eine Änderung der ONBasis kann dazu führen, daß ν durch $2\pi - \nu$ ersetzt werden muß.
Die zweite Möglichkeit entspricht dem Fall 3) für das Minimalpolynom. Es liegt eine orthogonale Spieglung vor. Der Spieglungsvektor, also der Eigenvektor zum Eigenwert -1, ist als Übungsaufgabe zu bestimmen. Die Spieglungsgerade wird von dem Eigenvektor zum Eigenwert 1 als Teilraum erzeugt.

Übung: Benutze die Additionstheoreme für sin und cos um zu zeigen, daß

$$D : \mathbb{R} \to \mathrm{O}(2, \mathbb{R}) : \nu \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\nu) & -\sin(\nu) \\ \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. $D(\nu_1)D(\nu_2) = D(\nu_1 + \nu_2)$.

Übung: Zeige, daß das Produkt zweier Spieglungen (in der Dimension 2) eine Drehung ergibt. Wie hängen Drehwinkel und der von den Spieglungsvektoren eingeschlossene Winkel zusammen?

Übung: Interpretiere Satz 1.35 für allgemeine orthogonale Abbildungen. Folgere mit Hilfe der letzten Übungsaufgabe, daß jede orthogonale Abbildung als Produkt von $\leq \mathrm{Dim}(V)$ Orthogonalspieglungen geschrieben werden kann.

Eine wichtige Rolle spielen orthogonale Abbildungen beim Verständnis allgemeiner Automorphismen:

Satz 1.40. (Polarzerlegung) *Sei $\beta \in \mathrm{GL}(V)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\gamma \in \mathrm{O}(V, \Phi)$ und symmetrisches positiv definites $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ mit $\beta = \alpha \circ \gamma$. Ist β normal, so gilt auch $\beta = \gamma \circ \alpha$.*

Beweis. Zur Abwechslung führen wir den Beweis mit Matrizen. Sei also $B \in GL(n, \mathbb{R})$. Der Eindeutigkeitsbeweis gibt uns auch einen Hinweis für den Existenzbeweis: Sei $B = Ag = A'g'$ mit $A, A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $g, g' \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Dann gilt $A^2 = BB^{tr} = (A')^2$. Wir wissen aber, daß die positive Wurzel eindeutig ist nach Übung 13. Also ist $A = A'$ und damit auch $g = g'$. Nun zur Existenz: Definiere A als die eindeutige positive Wurzel aus BB^{tr}. Diese existiert nach Übung 13. Wir müssen zeigen, daß $g := A^{-1}B$ orthogonal ist. Aber

$$gg^{tr} = A^{-1}BB^{tr}A^{-1} = I_n$$

da A symmetrisch ist. q. e. d.

Kapitel 2

(Multi)linearformen

2.1 Linearformen

Lernziele 5.
- *Dualraum,*
- *Dualität für Teilräume,*
- *Anwendung auf lineare Gleichungssysteme,*
- *transponierte lineare Abbildung.*

Die einfachsten linearen Abbildungen, an die man denken kann, sind solche, die Werte im Grundkörper annehmen. Diese wollen wir jetzt einzeln und in ihrer Gesamtheit für einen fest vorgegebenen Vektorraum studieren.

Definition 2.1. Sei V ein K-Vektorraum. Eine *Linearform* (lineares Funktional oder Kovektor) auf oder von V ist eine lineare Abbildung $V \to K$ von V in K. Der *Dualraum* V^* von V ist der Vektorraum aller Linearformen von V.

***Beispiel* 2.2.** 1) Sei $V = K^{n\times 1}$ der Spaltenraum der Dimension n über K. Dann kann man V^* mit dem Zeilenraum $K^{1\times n}$ identifizieren, denn jede Linearform $\varphi \in (K^{n\times 1})^*$ kann mit ihrer Matrix bezüglich der Standardbasis von $K^{n\times 1}$ und der Standardbasis (1) von K, also der eindeutigen Zeile $A \in K^{1\times n}$ mit $\varphi_A = \varphi$ identifiziert werden.
2) Ist $V \leq K^M$ für eine Menge M, so liefert jedes $m \in M$ eine Linearform:

$$V \to K : f \mapsto f(m).$$

3) Ist $V \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum integrierbarer Funktionen, so ist

$$V \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

eine Linearform auf V.
4) Seien $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung und $B \in V^n, C \in W^m$ Basen von V und W. Analog zu der von B abhängigen Bijektion

$$Hom(V,W) \to W^n : \alpha \mapsto \alpha \circ B = (\alpha(b_1), \ldots, \alpha(b_n))$$

gibt es eine von C abhängige Bijektion

$$(V^*)^m \to Hom(V,W) : (\delta_1, \ldots, \delta_m) \mapsto \delta$$

mit

$$\delta(v) = \delta_1(v)c_1 + \ldots + \delta_m(v)c_m \qquad (v \in V).$$

Bei ersterem denkt man an die Spalten einer Matrix, bei letzterem an die Zeilen.
5) Der Realteil beim $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine Linearform.
6) Ist (V, Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum, so ist für jedes $v_0 \in V$ die Abbildung

$$\Phi(v_0, \ ) : V \to \mathbb{R} : w \mapsto \Phi(v_0, w)$$

linear, also $\Phi(v_0, \ ) \in V^*$.

Übung: In einem EUKLIDischen Vektorraum (V, Φ) ist die Abbildung ein Monomorphismus:

$$V \to V^* : v \mapsto \Phi(v, \ ).$$

Wieviel weiß man über einen gegebenen Vektor, wenn man die Werte seiner Linearformen kennt? Welche Werte enthalten keine neue Information? Wann ist ein Vektor eindeutig durch diese Werte festgelegt?

Satz 2.3. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum .*
1) Es gilt $\mathrm{Dim}(V^*) = \mathrm{Dim}(V)$.
2) Ist $B \in V^n$ eine Basis von V, so ist $B^* \in (V^*)^n$ definiert durch $b_i^* \in V^*$ mit $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ eine Basis von V^*, genannt die Dualbasis von V^* zu B. Für alle $v \in V$ gilt

$$\boxed{v = b_1^*(v)b_1 + \cdots + b_n^*(v)b_n}.$$

Beweis. Wir zeigen, daß B^* eine Basis von V^* ist. Lineare Unabhängigkeit: Sei $a \in K^n$ mit $a_1b_1^* + \cdots + a_nb_n^* = 0$. Nach Definition der Addition und Multiplikation in $V^* \leq K^V$ folgt

$$0 = (a_1b_1^* + \cdots + a_nb_n^*)(b_i) = a_1b_1^*(b_i) + \cdots + a_nb_n^*(b_i) = a_i.$$

Also ist B^* linear unabhängig. Weiter $\langle B^* \rangle = V^*$, denn sei $\varphi \in V^*$ und $a_i := \varphi(b_i)$. Dann nehmen φ und $a_1b_1^* + \cdots + a_nb_n^*$ auf den Basisvektoren B_i dieselben Werte an, sind also wegen der Linearität gleich. Der Rest ist jetzt klar. q. e. d.