Schränkt man die Operation von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ auf V^n auf $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ein, so bilden die Orthonormalbasen genau eine Bahn unter $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Wir schauen uns nun an, wie die Matrix eines normalen Endomorphismus bezüglich einer ONBasis aussieht.

Lemma 1.32. *Sei* $\mathrm{Dim}(V) = 2$, $B \in V^2$ *eine beliebige ONBasis und* $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ *normal mit irreduziblem Minimalpolynom. Dann gilt* ${}^B\alpha^B \in \langle I_2, i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle$ *(und umgekehrt). Genauer: Ist* $\mu_\alpha(X) = (X-a)^2 + b^2$ *das Minimalpolynom von* α*, so ist* ${}^B\alpha^B = aI_2 \pm bi$*, und ist* $\mu_\alpha(X) = X - a$*, so ist* ${}^B\alpha^B = aI_2$.

Beweis. $\alpha = \alpha_{sym} + \alpha_{schief}$. Dann gilt für eine ONBasis B von α, dass ${}^B\alpha^B_{sym}$ eine symmetrische Matrix ist und dass die Einträge auf der Diagonalen von ${}^B\alpha^B_{schief}$ alle 0 sind,

$$ {}^B(\alpha_{sym})^B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a' \end{pmatrix} \text{ und } {}^B(\alpha_{schief})^B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} $$

für geeignete $a, a', b, c \in \mathbb{R}$. Falls $b = 0$, so ist $\alpha = \alpha_{sym}$ und ${}^B\alpha^B_{sym}$ bezüglich der ONBasis eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen, laut Spektralsatz. Da das Minimalpolynom von α irreduzibel ist, muss es Grad 1 haben, also mus $a = a'$ und $c = 0$ gelten. Also ist ${}^B\alpha^B = {}^B\alpha^B_{sym} = aI_2$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha(X) = (X-a)$. Sei also $b \neq 0$. Nach Bemerkung 1.31 sind die beiden Matrizen miteinander vertauschbar, was sofort $a = a', c = 0$ impliziert. Also ${}^B\alpha^B = {}^B\alpha^B_{sym} + {}^B\alpha^B_{schief} = aI_2 + {}^B(\alpha_{schief})^B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha(X) = (X-a)^2 + b^2$. q. e. d.

Die selbstadjungierten Abbildungen bilden einen Teilvektorraum von $\mathrm{End}(V)$, aber dies ist nicht der Fall für normale Endomorphismen. Aber selbstverständlich sind mit α auch alle Polynome in α und in α^{ad}, sowie deren Kompositionen normal. Bevor wir zur Normalform der Matrizen von normalen Abbildungen kommen, brauchen wir noch die folgenden Lemmas.

Lemma 1.33. *Sei* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*. Dann ist* $Rg(A^{tr}A) = Rg(A)$.

Beweis. Wir zeigen $\mathrm{Kern}(A^{tr}A) = \mathrm{Kern}(A)$.

Sei $v \in \mathrm{Kern}(A)$. Dann ist $Av = 0$ und also auch $A^{tr}Av = 0$, d.h. $\mathrm{Kern}(A) \leq \mathrm{Kern}(A^{tr}A)$.

Sei andererseits $v \in \mathrm{Kern}(A^{tr}A)$. Dann ist $A^{tr}Av = 0$ und somit auch $v^{tr}A^{tr}Av = 0$. Dies bedeutet aber, dass $(Av)^{tr}Av = 0$. Nach Übung 10 folgt daraus $Av = 0$, d.h. $\mathrm{Kern}(A^{tr}A) \leq \mathrm{Kern}(A)$. Also ist $\mathrm{Kern}(A^{tr}A) = \mathrm{Kern}(A)$. Damit ist aber auch $Rg(A^{tr}A) = Rg(A)$. q. e. d.

Lemma 1.34. *Ist $\pi \in \mathrm{End}(V)$ eine normale Projektion, also $\pi^{ad} \circ \pi = \pi \circ \pi^{ad}$ und $\pi^2 = \pi$, so ist π bereits selbstadjungiert.*

Beweis. Wir haben $V = \mathrm{Kern}(\pi) \oplus \mathrm{Bild}(\pi)$. Wir müssen zeigen, daß dies eine orthogonale Zerlegung ist. Wegen der Vertauschbarkeit von π^{ad} und π ist aber $\pi^{ad} \circ \pi$ offensichtlich eine selbstadjungierte Projektion. Nach Beispiel 1.24 ist damit $\pi^{ad} \circ \pi$ eine Orthogonalprojektion, d.h. $\mathrm{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi)^{\perp} = \mathrm{Bild}(\pi^{ad} \circ \pi)$ und $V = \mathrm{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi) \oplus \mathrm{Bild}(\pi^{ad} \circ \pi)$.

Wir sind daher fertig, wenn wir $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi)$ und $\mathrm{Bild}(\pi) = \mathrm{Bild}(\pi^{ad} \circ \pi)$ nachweisen.

Offensichtlich ist $\mathrm{Kern}(\pi) \subseteq \mathrm{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi)$. Andererseits ist $\mathrm{Rg}(\pi) = \mathrm{Rg}(\pi^{ad} \circ \pi)$, was wir am besten an den Matrizen sehen: $\mathrm{Rg}(A^{tr}A) = \mathrm{Rg}(A)$; Dies folgt aus dem vorhergehenden Lemma. Aus Dimensionsgründen bekommen wir also $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathrm{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi)$.

Weiter ist offenbar $\mathrm{Bild}(\pi) \subseteq \mathrm{Bild}(\pi \circ \pi^{ad})$. Wiederum aus Dimensionsgründen bekommen wir Gleichheit. q. e. d.

Satz 1.35. *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann ist das Minimalpolynom $\mu_\alpha(X)$ von α vielfachheitenfrei. Ist*

$$\mu_\alpha(X) = \prod_j (X - c_j) \prod_\ell ((X - a_\ell)^2 + b_\ell^2)$$

die Zerlegung von $\mu_\alpha(X)$ in irreduzible Faktoren, so existiert eine ONBasis $B \in V^n$ von V, so daß ${}^B\alpha^B$ eine Blockdiagonalmatrix ist mit Diagonalblöcken $c_j \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $a_\ell I_2 + b_\ell i$ mit $i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei jeder Block mit einer wohlbestimmten positiven Vielfachheit vorkommt.

Man beachte folgende Spezialfälle:
1) Selbstadjungiert heißt, daß keine irreduziblen Teiler vom Grad 2 des Minimalpolynoms vorhanden sind (siehe Spektralsatz).
2) Schiefsymmetrisch heißt, alle $c_j = 0$ und alle $a_\ell = 0$.
3) Orthogonal heißt, alle $c_j^2 = 1$ und alle $a_\ell^2 + b_\ell^2 = 1$.

Beweis. Beh.: $\mu_\alpha(X)$ ist vielfachheitenfrei. Zeige also, für $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(\alpha)^2 = 0$ gilt bereits $p(\alpha) = 0$.

Aus $p(\alpha)^2 = 0$ folgt auch $p(\alpha^{ad})^2 = (p(\alpha)^{ad})^2 = 0$. Dies wiederum impliziert mit Übung 10, dass $p(\alpha^{ad})^2 \circ p(\alpha)^2 = 0$. Da α und somit auch $p(\alpha)$ normal ist, erhalten wir $p(\alpha^{ad}) \circ p(\alpha) \circ p(\alpha^{ad}) \circ p(\alpha) = 0$, d.h.

$$(p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha))^{ad} \circ (p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha)) = 0.$$

Dies wiederum impliziert $p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha) = 0$, woraus nach Übung 10 $p(\alpha) = 0$ folgt.

Sei nun $\pi \in \mathrm{End}(V)^k$ die Zerlegung der Identität, die zu der oben angegebenen Zerlegung des Minimalpolynoms in irreduzible Faktoren gehört, also $\pi_j = q_j(\alpha)$ für ein geeignetes $q_j(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $\mathrm{Bild}(\pi_j) = \mathrm{Kern}(p_j(\alpha))$, wo $p_j(X)$ der j-te irreduzible Faktor von $\mu_\alpha(X)$ in der obigen Zerlegung ist. Nach Lemma 1.34 sind alle π_j bereits selbstadjungiert, so daß die diversen $\mathrm{Bild}(\pi_j)$ paarweise orthogonal zueinander sind. Die gewünschte ONBasis von V setzen wir nun aus ONBasen der $\mathrm{Bild}(\pi_j)$ zusammen. Ist $\mathrm{Grad}(p_j(X)) = 1$, so funktioniert jede ONBasis von $\mathrm{Bild}(\pi_j)$, wie wir bereits beim Spektralsatz gesehen haben. Ist $\mathrm{Grad}(p_j(X)) = 2$, so konstruiert man eine ONBasis C von $\mathrm{Bild}(\pi_j)$ wie folgt: $c_1 \in \mathrm{Bild}(\pi_j)$ beliebig von der Länge 1. $c_2 \in \langle c_1, \alpha(c_1)\rangle$ von der Länge 1 orthogonal zu c_1. Beachte $\alpha(\langle c_1, \alpha(c_1)\rangle) = \langle c_1, \alpha(c_1)\rangle$. Wähle nun $c_3 \in \langle c_1, c_2\rangle^\perp$ und $c_4 \in \langle c_3, \alpha(c_3)\rangle$ analog zu c_2. Etc. Am Ende hat man eine Basis von $\mathrm{Bild}(\pi_j)$, welche nach Lemma 1.32 fast die gewünschte Matrix liefert. Sie liefert die gewünschte Matrix genau, wenn man gewisse c_{2i} durch ihre negativen ersetzt. q. e. d.