Beweis. Wähle eine ONBasis $(b_1, \ldots, b_d)$ von U und ergänze zu einer ONBasis $B = (b_1, \ldots, b_d, \ldots, b_n)$ von V. Offenbar ist $(b_{d+1}, \ldots, b_n)$ eine ONBasis von $U^\perp$ und die erste Behauptung folgt.
Wir machen noch eine Bemerkung, die in der Praxis hilft:

$$\pi_U : V \to V : v \mapsto \Phi(b_1, v)b_1 + \cdots + \Phi(b_d, v)b_d$$

und

$$\pi_{U^\perp} : V \to V : v \mapsto \Phi(b_{d+1}, v)b_{d+1} + \cdots + \Phi(b_n, v)b_n$$

bestimmen einander, denn $\pi_U + \pi_{U^\perp} = \mathrm{Id}_V$ und es ist am wenigsten aufwendig, die Projektion auf den Teilraum der kleineren Dimension zu bestimmen.
Um die letzte Behauptung zu zeigen, sei $v - u = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$. Dann ist $|v - u|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$. Durch Variieren von $u \in U$ ändern sich nur $a_1, \ldots, a_d$, während $a_{d+1}, \ldots, a_n$ unverändert bleiben. Da u so gewählt werden kann, daß $a_1 = \ldots = a_d = 0$ ist, ist klar daß das Minimum nur genau einmal, und zwar so wie behauptet, angenommen wird. q. e. d.

***Beispiel* 1.21.**

1. (Abstand Gerade Vektor im $\mathbb{R}^2$) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt Φ ausgestattet.
   Aufgabe: Zerlege $(1, 0, 0)$ in Komponenten bezüglich $\langle(1, 1, 1)\rangle \oplus \langle(1, 1, 1)\rangle^\perp$. Was ist der Abstand von $(1, 2)$ der Geraden $U = \langle(1, 1)\rangle$? Lösung: $U := \langle(1, 1)\rangle$ hat $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1))$ als ONBasis, also haben wir

   $$\pi_U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a, b) \mapsto \frac{a + b}{2}(1, 1)$$

   als Orthogonalprojektion auf U. Wir bekommen also als Zerlegung von $(1, 2)$

   $$(1, 2) = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1)$$

   und der Abstand von $(1, 2)$ von U ist $|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und von $U^\perp$ ist $|(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})| = \frac{\sqrt{18}}{2}$.

2. (Abstand Gerade Vektor) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt Φ ausgestattet.
   Aufgabe: Zerlege $(1, 0, 0)$ in Komponenten bezüglich $\langle(1, 1, 1)\rangle \oplus \langle(1, 1, 1)\rangle^\perp$. Was ist der Abstand von $(1, 0, 0)$ von jedem dieser Teilräume?
   Lösung: $U := \langle(1, 1, 1)\rangle$ hat $(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1))$ als ONBasis, also haben wir

   $$\pi_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \mapsto \frac{a + b + c}{3}(1, 1, 1)$$

   als Orthogonalprojektion auf U. Wir bekommen also als Zerlegung von $(1, 0, 0)$

   $$(1, 0, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$$

   und der Abstand von $(1, 0, 0)$ von U ist $|(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})| = \sqrt{6}/3$ und von $U^\perp$ ist $|(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})| = 1/\sqrt{3}$.

1.3 Reelle Spektraltheorie

Lernziele 3.

- *Adjungierte eines Endomorphismus,*
- *Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen,*
- *normale Endomorphismen.*

In diesem Abschnitt sei (V, Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum der Dimension n. Wir wollen Endomorphismen von V studieren, insbesondere solche, die in besonderer Weise mit dem inneren Produkt zusammenhängen wie etwa die Orthogonalprojektionen aus dem letzten Abschnitt. Ausgangspunkt ist der folgende Satz.

Satz 1.22. *Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ mit*

$$\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\alpha^{ad}(v), w) \text{ für alle } v, w \in V.$$

α^{ad} heißt die zu α adjungierte (lineare) Abbildung. Ist $B \in V^n$ eine Basis von V, so gilt

$$^B(\alpha^{ad})^B = ({}_B\Phi^B)^{-1}({}^B\alpha^B)^{tr}\,{}_B\Phi^B,$$

insbesondere

$$^B(\alpha^{ad})^B = ({}^B\alpha^B)^{tr}$$

falls B eine ONBasis ist.

Beweis. Wir definieren $\beta \in \mathrm{End}(V)$ durch ${}^B\beta^B := ({}_B\Phi^B)^{-1}({}^B\alpha^B)^{tr}\,{}_B\Phi^B$ und zeigen dann, dass wir α^{ad} als β wählen können. Wir zeigen zunächst, dass diese Definition unabhängig ist von der Wahl der Basis B. Sei C eine weitere Basis von V, so hat man wegen $({}^C\mathrm{Id}_V^B)^{tr}({}_C\Phi^C) = {}_B\Phi^{BB}\,\mathrm{Id}_V^C$ (siehe Kor 1.9)

$$\begin{aligned}
{}^C\beta^C &= {}^C\mathrm{Id}_V^B\,{}^B\beta^{BB}\,\mathrm{Id}_V^C \\
&= {}^C\mathrm{Id}_V^B({}_B\Phi^B)^{-1}({}^B\alpha^B)^{tr}\,{}_B\Phi^{BB}\,\mathrm{Id}_V^C \\
&= ({}_C\Phi^C)^{-1}({}^C\mathrm{Id}_V^B)^{-tr}({}^B\alpha^B)^{tr}({}^C\mathrm{Id}_V^B)^{tr}\,{}_C\Phi^C \\
&= ({}_C\Phi^C)^{-1}({}^C\mathrm{Id}_V^B\,{}^B\alpha^{BB}\,\mathrm{Id}_V^C)^{tr}\,{}_C\Phi^C \\
&= ({}_C\Phi^C)^{-1}({}^C\alpha^C)^{tr}\,{}_C\Phi^C
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß wir α^{ad} als β wählen können, schreiben wir uns die definierende Gleichung

$$\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\alpha^{ad}(v), w) \text{ für alle } v, w \in V$$

als Matrixgleichung in der Basis B aus:

$$v_B \cdot {}_B\Phi^B \cdot ({}^B\alpha^B \cdot {}^Bw) = (v_B \cdot ({}^B(\alpha^{ad})^B)^{tr}) \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw$$

also

$$_B\Phi^B \cdot {}^B\alpha^B = ({}^B(\alpha^{ad})^B)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B.$$

Dies zeigt sowohl, dass wir $\alpha^{ad} := \beta$ wählen können als auch, dass dies die einzige Möglichkeit für α^{ad} ist. q. e. d.

Wir wollen uns jetzt mit selbstadjungierten oder symmetrischen linearen Abbildungen beschäftigen. Diese treten in vielen Anwendungen auf (Trägheitstensor in Mechanik, Spannungstensor in der linearen Elastizitätstheorie, etc.).

Definition 1.23. $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ heißt *selbstadjungiert* oder *symmetrisch*, falls $\alpha^{ad} = \alpha$.

***Beispiel* 1.24.** Eine Orthogonalprojektion, also ein $\pi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\pi^2 = \pi \text{ und } \mathrm{Kern}(\pi)^\perp = \mathrm{Bild}(\pi)$$

ist selbstadjungiert: Seien $v = v_1 + v_2$ und $w = w_1 + w_2$ mit $v_1, w_1 \in \mathrm{Kern}(\pi)$ und $v_2 = \pi(v), w_2 = \pi(w) \in \mathrm{Bild}(\pi)$. Dann ist

$$\Phi(v, \pi(w)) = \Phi(v_1 + v_2, w_2) = \Phi(v_2, w_2) = \Phi(\pi(v), w_1 + w_2) = \Phi(\pi(v), w).$$

Also ist π selbstadjungiert.

Umgekehrt ist klar, daß jede selbstadjungierte Projektion $\pi \in \mathrm{End}(V)$ eine Orthogonalprojektion ist. Denn sei $v = \pi(v) \in \mathrm{Bild}(\pi)$ und $w \in \mathrm{Kern}(\pi)$, dann ist

$$\Phi(w, v) = \Phi(w, \pi(v)) = \Phi(\pi(w), v) = \Phi(0, v) = 0, \text{ d.h. } \mathrm{Kern}(\pi)^\perp = \mathrm{Bild}(\pi).$$

Bemerkung 1.25. Ist $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, so ist

$$\Phi_\alpha : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \Phi(v, \alpha(w))$$

eine symmetrische Bilinearform. Umgekehrt kann jede symmetrische Bilinearform Ψ auf V als $\Psi = \Phi_\alpha$ mit einem eindeutig bestimmten selbstadjungierten $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ dargestellt werden. Für beliebige Basen B von V gilt

$$_B(\Phi_\alpha)^B = {}_B\Phi^B \cdot {}^B\alpha^B,$$

so daß speziell für ONBasen B gilt

$$_B(\Phi_\alpha)^B = {}^B\alpha^B.$$

Man beachte in diesem Kontext, daß die Transformationsgesetze für die Matrizen bilinearer Formen und für die Matrizen von Endomorphismen für allgemeine Basen verschieden sind, jedoch für ONBasen zusammenfallen, denn die Transformationsmatrizen von ONBasen sind orthogonal.

Definition 1.26. Eine Matrix $g \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, falls $g^{tr}g = I_n$, d.h. g ist invertierbar mit $g^{-1} = g^{tr}$. Die Menge aller orthogonalen Matrizen vom Grad n wird mit $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ bezeichnet und heißt die *orthogonale Gruppe* vom Grad n über $\mathbb{R}$.

Übung: Zeige $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation, also eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Satz 1.27. *(Reeller Spektralsatz, Hauptachsentransformation)*

1. *Ist α selbstadjungierter Endomorphismus des* EUKLID*ischen Vektorraums V, so existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von α.*

2. *(Matrixversion) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ eine symmetrische Matrix, so existiert eine orthogonale Matrix $g \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ mit $g^{tr}Ag = g^{-1}Ag$ diagonal.*

Beweis. Offenbar ist die Matrixversion eine unmittelbare Konsequenz der Abbildungsversion. Wir zeigen also nur 1).
1. Schritt: Beh: Das Minimalpolynom $\mu_\alpha(X)$ von α ist vielfachheitenfrei. Um dies einzusehen genügt es, folgende Implikation zu zeigen: Ist $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(\alpha)^2 = 0$, so gilt $p(\alpha) = 0$. (Denn wir können $p(X)^2$ als Vielfaches kleinsten Grades von $\mu_\alpha(X)$ definieren, in dem alle Faktoren, die in $\mu_\alpha(X)$ nur einmal auftreten, doppelt auftreten.) Mit α ist auch $p(\alpha)$ selbstadjungiert, so daß $p(\alpha)^2 = p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha)$. In Matrizen bezüglich einer ONBasis B von V mit $A := {}^B\alpha^B$ gilt dann $p(A)^2 = p(A)^{tr}p(A)$. Also folgt aus $p(\alpha)^2 = 0$, dass auch $p(A)^{tr}p(A) = 0$, und also $p(A) = 0$ (da für eine Matrix B nur dann $B^{tr}B = 0$ gelten kann, wenn $B = 0$), d.h. $p(\alpha) = 0$.
Als Konsequenz dieses Schrittes bekommen wir eine Zerlegung der Identität von V in orthogonale Idempotente π_i gemäß den normierten irreduziblen Teilern p_i von $\mu_\alpha(x)$. (Vergl. Satz 5.19 und Lemma 5.20 aus der LA I). Da jedes π_i von der Form $q_i(\alpha)$ für ein $q_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ ist, ist jedes π_i selbstadjungiert, so daß die Komponenten $\mathrm{Bild}(\pi_i)$ der Zerlegung

$$V = \mathrm{Bild}(\pi_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Bild}(\pi_k)$$

paarweise orthogonal zueinander sind, vgl. Beispiel 1.24. Weiter induziert α auf jedem $\mathrm{Bild}(\pi_i)$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung α_i mit irreduziblem Minimalpolynom $p_i(x)$. Der zweite Schritt ist also:
2. Schritt: Beh: Hat ein selbstadjungierter Endomorphismus α_i ein irreduzibles Minimalpolynom, so ist dieses von Grad 1, insbesondere $\mathrm{Grad}(p_i) = 1$.
Da die irreduziblen reellen Polynome immer nur Grad 1 oder 2 haben, müssen wir Grad

2 ausschließen. Also angenommen, der Grad ist 2. Dann haben wir einen Vektor v mit $(v, \alpha_i(v))$ linear unabhängig, aber

$$(v, \alpha_i(v), \alpha_i^2(v))$$

linear abhängig. Bezüglich einer ONBasis von $\langle v, \alpha_i(v)\rangle$ ist die Operation von α_i auf diesem 2-dimensionalen Teilraum durch eine symmetrische 2×2-Matrix beschrieben, von der wir noch annehmen können, daß sie Spur Null hat, weil man ein geeignetes Vielfache der Identitätsabbildung von α_i subtrahieren kann:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Dann wäre das Polynom aber $x^2 - (a^2 + b^2)$, welches aber offensichtlich reduzibel in $\mathbb{R}[x]$ ist.
3. Schritt (Zusammenfassung): (Vergl. den Beweis von Satz 5.18 aus der LA I). Wir haben also eine Zerlegung von V in die Eigenräume Bild(π_i) von α. Indem wir eine ONBasis von jedem Bild(π_i) wählen und diese zu einer ONBasis von V zusammenfügen, folgt die Behauptung, denn die π_i sind als Polynome in α selbstadjungiert, so daß die Eigenräume paarweise orthogonal zueinander sind. q. e. d.

Als *Hauptachsen* bezeichnen wir die eindimensionalen Teilräume, die von den Vektoren der ONEigenvektorbasis erzeugt werden. Sie sind natürlich nur dann eindeutig, wenn alle Eigenräume eindimensional sind.

Der Spektralsatz liefert dann eine sehr anschauliche Vorstellung von einer symmetrischen linearen Abbildung: Man hat Streckungen eventuell mit negativen Streckungsfaktoren in Richtung der Hauptachsen. Dieses anschauliche Bild wird noch ergänzt indem wir uns anschauen, was mit einer Sphäre unter einer selbstadjungierten linearen Abbildung passiert:

Bemerkung 1.28. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und $B \in V^n$ eine ONBasis aus Eigenvektoren von α mit $\alpha(b_i) = a_i b_i$. Die *Einheitssphäre*

$$S^{n-1} := \{x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

wird durch α im Falle $a_i \neq 0$ für alle i auf das *Ellipsoid*

$$\alpha(S^{n-1}) = \{y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n \mid \sum_i (\frac{y_i}{a_i})^2 = 1\}$$

abgebildet und im Falle $a_i = 0$ für mindestens ein i auf

$$\alpha(S^{n-1}) = \{y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n \mid \sum_{a_i \neq 0} (\frac{y_i}{a_i})^2 \leq 1, y_i = 0 \text{ falls } a_i = 0\}.$$

***Beispiel* 1.29.** Sei $\mathrm{Dim}(V) = 3$ mit ONBasis B und

$$^{B}\alpha^{B} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =: A$$

Eine ONBasis von V aus Eigenvektoren von α ist auch eine ONBasis von V aus Eigenvektoren von $\alpha - 2\,\mathrm{Id}_V$ und umgekehrt. Von $J := A - 2I_3$ kann man die Eigenwerte sofort sehen, denn $J^2 = 3J$, d.h. $\mu_J(x) = x(x-3)$: Sie sind 0 und 3. (Also sind die Eigenwerte von A gleich 2 und 5.) Die Eigenräume sind $\langle b_1 + b_2 + b_3 \rangle$ und $\langle b_1 - b_2, b_2 - b_3 \rangle$. Durch Orthogonalisieren der letzten beiden Vektoren erhalten wir dann die ONBasis C aus Eigenvektoren:

$$^{B}\,\mathrm{Id}_V^{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Auch ohne diese Basis explizit anzugeben, wissen wir, daß $^{C}\alpha^{C} = \mathrm{Diag}(5, 2, 2)$ ist.

Definition 1.30. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$.
1) α heißt *normal*, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$.
2) α heißt *orthogonal*, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$, d.h. $\alpha^{ad} = \alpha^{-1}$. Die Menge der orthogonalen Transformationen von V wird mit $\mathrm{O}(V, \Phi)$ bezeichnet und heißt die *orthogonale Gruppe* von V oder (V, Φ).
3) α heißt *schiefsymmetrisch*, falls $\alpha^{ad} = -\alpha$.

Folgende Arten von Endomorphismen sind normal: selbstadjungierte orthogonale, schiefsymmetrische. Die Bedingung für normal kann man auch so lesen: Sowohl $\alpha^{ad} \circ \alpha$ als auch $\alpha \circ \alpha^{ad}$ sind selbstadjungiert. α ist normal, wenn beide gleich sind. Ein Wort zu dem Zusammenspiel symmetrischer, schiefsymmetrischer und normaler Endomorphismen.

Bemerkung 1.31. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:
1) $\alpha_{sym} := 1/2(\alpha + \alpha^{ad})$ ist symmetrisch, $\alpha_{schief} := 1/2(\alpha - \alpha^{ad})$ ist schiefsymmetrisch und $\alpha = \alpha_{sym} + \alpha_{schief}$,
2) α ist genau dann normal, wenn

$$\alpha_{sym} \circ \alpha_{schief} = \alpha_{schief} \circ \alpha_{sym}.$$

Beweis. Übung. q. e. d.