Beweis. Angenommen $\varphi : V \to V'$ ist linear mit $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ für alle $P, Q \in \mathcal{A}$. Da $V = T(\mathcal{A}) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{A}\}$ ist $\varphi = \overline{f}$. q. e. d.

Anschaulich interpretieren wir die Bedingung so: Ist $P \in \mathcal{A}$, so liefert $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ eine Identifikation von $\mathcal{A}$ mit V und $S \mapsto \overrightarrow{f(P)S}$ eine Identifikation von Bild(f) mit Bild$(\overline{f})$. Im Sinne dieser Identifikation ist f dann eine lineare Abbildung, nämlich $\overline{f}$. Es kommt hinzu, daß $\overline{f}$ unabhängig von der Wahl von P ist.

Übung: Translationen sind affine Abbildungen, deren linearer Anteil die Identität des Translationsraumes ist. Sie sind auch die einzigen affinen Abbildungen eines affinen Raumes in sich mit dieser Eigenschaft.

Bemerkung 5.12. Für den bijektiven Fall fällt die Definition der affinen Abbildung ziemlich genau mit der Ähnlichkeit von Gruppenoperationen in Definition 6.8 zusammen, lediglich der Gruppenisomorphismus ρ in 6.8 ist ein etwas speziellerer Isomorphismus $\overline{f}$ von Vektorräumen. Beachte $\hat{v} = \tau_v$. Also das Diagramm aus 6.8 wird zu

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\hat{v}=\tau_v} & \mathcal{A} \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow[\widehat{\overline{f}(v)}=\tau_{\overline{f}(v)}]{} & \mathcal{A}' \end{array}$$

mit $v \in V$.

Satz 5.13. *1) Kompositionen affiner Abbildungen sind affin: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affine Räume über K-Vektorräumen mit affinen Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ und $f' : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$, so ist $f' \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ affin mit $\overline{f' \circ f} = \overline{f'} \circ \overline{f}$.*
2) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und bijektiv, so ist $f^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ebenfalls affin mit $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$. (Man sagt, f ist ein affiner Isomorphismus.) Insbesondere ist

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} | f \text{ affin und bijektiv } \}$$

eine Gruppe (Untergruppe von $S_{\mathcal{A}}$, der symmetrischen Gruppe von $\mathcal{A}$), genannt die affine Gruppe von $\mathcal{A}$, und

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) : f \mapsto \overline{f}$$

ein Homomorphismus von Gruppen.
3) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$, so ist $f(\mathcal{A}'')$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{T}(f(\mathcal{A}'')) = \overline{f}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.
4) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$, so ist $f^{-1}(\mathcal{A}'')$ leer oder ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{A}'')) = \overline{f}^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.

Beweis. 1) Für $P, Q \in \mathcal{A}$ ist

$$\overrightarrow{(f' \circ f)(P)(f' \circ f)(Q)} = \overrightarrow{f'(f(P))f'(f(Q))} =$$

$$\overline{f'}(\overrightarrow{f(P)f(Q)}) = (\overline{f'} \circ \overline{f})(\overrightarrow{PQ}).$$

2)Wegen der Identifikation von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ist klar, daß $\overline{f} : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ bijektiv ist. (Genauer Beweis: Übung!). Zeige nur noch

$$\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')} = \overline{f}^{-1}(\overrightarrow{P'Q'})$$

für alle $P', Q' \in \mathcal{A}'$. Dies ist aber äquivalent zu

$$\overline{f}(\overrightarrow{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}) = \overrightarrow{P'Q'}.$$

3) Übung.
4) Leicht mit 5.5 Teil 2. q. e. d.

Übung: Zeige: Parallelität und schwache Parallelität von affinen Teilräumen bleiben unter affinen Abbildungen erhalten. Die Eigenschaft, windschief zu sein, bleibt unter injektiven affinen Abbildungen erhalten. Wie steht es mit Urbildern?

Wir können etwas unscharf sagen, daß affine Geometrie das Studium von Eigenschaften ist, welche unter affinen Isomorphismen erhalten bleiben, oder auch das Studium der Invarianten der affinen Gruppe bei diversen Operationen. Hier ein Anfang: Die Dimension.

Satz 5.14. *Zwei affine Räume $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ über demselben Körper K sind genau dann affin isomorph, wenn $\operatorname{Dim} \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \operatorname{Dim} \mathcal{T}(\mathcal{A}')$. Insbesondere ist $\mathcal{A}$ affin isomorph zu $\mathcal{A}_n(K)$ für $n = \operatorname{Dim} \mathcal{A}$. Ein affiner Isomorphismus $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(K)$ heißt* affines Koordinatensystem.

Je nach Präferenz würde man eher einen affinen Isomorphismus auf $\mathcal{A}(K^{n\times 1})$ als affines Koordinatensystem bezeichnen. Wir bevorzugen aber $\mathcal{A}_n(K)$ als Standardmodell. Einen affinen Isomorphismus auf $\mathcal{A}_n^b(K)$ wird man als baryzentrisches Koordinatensystem bezeichnen. Die Idee des Koordinatensystems geht zurück auf DESCARTES,1596-1650, der hierdurch die Algebra und Analysis als Hilfsmittel der Geometrie zugänglich machte.

Beweis. Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ein affiner Isomorphismus, so ist $\overline{f} : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ein Vektorraumisomorphismus, also $\operatorname{Dim} \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \operatorname{Dim} \mathcal{T}(\mathcal{A}')$. Umgekehrt, sei $\varphi : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A}')$ ein Vektorraumisomorphismus. Offenbar ist für jedes beliebige, fest gewählte $P_0 \in \mathcal{A}$ die Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0(\mathcal{T}(\mathcal{A}))(= \mathcal{T}(\mathcal{A})) : P \mapsto \overrightarrow{P_0P}$ ein affiner Isomorphismus (Beweis: Übung). Also erhält man durch Komposition einen affinen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}'$, falls die Dimensionen gleich sind. (Man zeige als Übungsaufgabe: Dieser Isomorphismus ist gegeben durch $P \mapsto P_0' + \varphi(\overrightarrow{P_0P})$, wo $P_0' \in \mathcal{A}'$ beliebig, aber fest gewählt ist.) q. e. d.

Somit ist die Dimension eine affine Invariante. Wir wollen uns ansehen, wie in den verschiedenen Modellen für affine Räume, die wir gesehen haben, die affinen Abbildungen aussehen und dargestellt werden.

***Beispiel* 5.15.** 1) Sind V, W K-Vektorräume, so gilt

$$\mathcal{A}_0(V) \to \mathcal{A}_0(W) : v \mapsto Q_0 + \varphi(v)$$

ist für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ und jedes $Q_0 \in W = \mathcal{A}(W)$ eine affine Abbildung. Umgekehrt ist jede affine Abbildung $\mathcal{A}_0(V) \to \mathcal{A}_0(W)$ von dieser Form mit eindeutig bestimmten $Q_0 \in W$ und φ.
2) Sei $\tilde{V}, \varphi, \mathrm{Kern}(\varphi) = V, \mathcal{A}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1\})$ wie in 5.3. Entsprechend nehmen wir einen zweiten affinen Raum mit den Daten $\tilde{W}, \psi, \mathrm{Kern}(\psi) = W, \mathcal{A}(\psi) = \psi^{-1}(\{1\})$. Dann ist eine affine Abbildung $f : \mathcal{A}(\varphi) \to \mathcal{A}(\psi)$ nichts anderes als die Einschränkung einer linearen Abbildung $\alpha : \tilde{V} \to \tilde{W}$, welche $\mathcal{A}(\varphi)$ in $\mathcal{A}(\psi)$ abbildet, d. h. für die $\psi \circ \alpha = \varphi$. Wir haben also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\varphi) & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}(\psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{W} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ K & = & K \end{array}$$

<u>Übung</u>: α legt f eindeutig fest und umgekehrt.
Wichtiger Spezialfall: $\mathrm{Aff}(\mathcal{A}_n(K))$ kann mit der Matrixgruppe

$$\mathrm{Aff}(n, K) := \{\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in \mathrm{GL}(n, K), t \in K^{n\times 1}\} \leq \mathrm{GL}(n+1, K)$$

identifiziert werden, die durch Linksmultiplikation auf $\mathcal{A}_n(K)$ operiert (ähnliche Operationen!). Man beachte, daß $\mathrm{Aff}(n, K)$ schon als Stabilisator eines Kovektors als Untergruppe von $\mathrm{GL}(n+1, K)$ früher vorkam.

<u>Übung</u>: Verifiziere und interpretiere die folgenden drei Formeln in $\mathrm{Aff}(n, K)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b & s \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} ab & as+t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} & -a^{-1}t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

und

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & s \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & as \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)}$$

und zeige, daß der Homomorphismus "linearen Anteil nehmen" durch

$$\mathrm{Aff}(n, K) \to \mathrm{GL}(n, K) : \left(\begin{array}{c|c} a & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto a$$

gegeben ist.

Dieses letzte Beispiel kann natürlich als eine Einladung verstanden werden, Begriffe, die wir bei Vektorräumen studiert haben, auf affine Räume zu übertragen und dann nach der geometrischen Bedeutung zu fragen. Die andere Möglichkeit ist, sich durch das Operationskonzept leiten zu lassen und nach Invarianten zu fragen. Dies ist übrigens die ursprüngliche Idee von Felix Klein, der vor ungefähr 130 Jahren in seinem Erlanger Programm gesagt hat: Geometrie ist das Studium der Invarianten gewisser geometrischer Gruppenoperationen.

5.3 Das Invarianzprinzip der affinen Geometrie

Bemerkung 5.16. $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ ist transitiv auf $\mathcal{A}$ und hat genau zwei Bahnen auf $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ gemäß den zwei Bahnen von $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Übung: Sei $P_0 \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeige: Jedes $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ kann in eindeutiger Weise als $f = \tau_v \circ \alpha$ geschrieben werden mit $v \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\alpha \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_0)$. Beachte: $\tau_v \circ \alpha = \alpha \circ \tau_{\overline{\alpha}^{-1}(v)}$. Zeige weiter: Die Operation von $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ ist ähnlich zu der von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_0)$ auf $\mathcal{A}$.

Bei der Operation auf Tripeln bekommen wir die ersten geometrischen Invarianten.

Definition 5.17. 1) $P \in \mathcal{A}^n$ heißt *affin unabhängig*, falls für jeden affinen Raum $\mathcal{A}'$ über K und jedes Tupel $Q \in (\mathcal{A}')^n$ eine affine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ existiert, mit $f \circ P = Q$, d. h. $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, \dots, n$. Ein maximal affines System P in $\mathcal{A}$ heißt auch *affine Basis* von $\mathcal{A}$.
2) Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{A}$ heißt

$$\langle M \rangle_a := \cap \mathcal{B},$$

wo $\mathcal{B}$ alle affinen Teilräume von $\mathcal{A}$ durchläuft mit $M \subseteq \mathcal{B}$, das affine Erzeugnis oder der von M erzeugte affine Teilraum von $\mathcal{A}$. (Analog für $M \in \mathcal{A}^n$).
3) $P \in \mathcal{A}^n$ heißt *kollinear* bzw. *komplanar*, falls $\mathrm{Dim}\langle P \rangle_a \leq 1$ bzw. ≤ 2 gilt.

Bemerkung 5.18. Für $P \in \mathcal{A}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
1) P ist affin unabhängig.
2) $\mathrm{Dim}\langle P \rangle_a = n - 1$.

3) $(\overrightarrow{P_nP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_nP_{n-1}}) \in \mathcal{T}(\mathcal{A})^{n-1}$ ist linear unabhängig.
4) Die affine Abbildung $\mathcal{A}^b_{n-1}(K) \to \langle P \rangle_a : (I_n)_{-,i} \mapsto P_i$ definiert einen affinen Isomorphismus.
Im Falle $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi) \subset \tilde{V}$ wie in 5.3 sind all diese Aussagen äquivalent zu:
5) $P \in \tilde{V}^n$ ist linear unabhängig.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 4) Daß eine affine Abbildung vorliegt, ist klar. Aus Definition der affinen Unabhängigkeit bekommt man eine affine Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^b_{n-1}(K)$ die P_i auf $(I_n)_{-,i}$ abbildet. Die Einschränkung dieser Abbildung auf $\langle P \rangle_a$ liefert die Inverse, d. h. es liegt ein affiner Isomorphismus vor.
4) $\Rightarrow$ 2) Die Dimension ist eine Invariante für affine Isomorphismen.
2) $\Rightarrow$ 3) Es gilt $\mathcal{T}(\langle P \rangle_a) = \langle \overrightarrow{P_nP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_nP_{n-1}} \rangle$. Also $n - 1 = \operatorname{Dim}\langle P \rangle_a = \operatorname{Dim}\langle \overrightarrow{P_nP_1}, \ldots, \overrightarrow{P_nP_{n-1}} \rangle$.
3) $\Rightarrow$ 1) Sei $\mathcal{A}'$ irgendein affiner Raum über dem K-Vektorraum V' und $Q \in (\mathcal{A}')^n$. Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V'$ mit $\varphi(\overrightarrow{P_nP_i}) = \overrightarrow{Q_nQ_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Also gibt es genau eine affine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit $\overline{f} = \varphi$ und $f(P_n) = Q_n$. Für diese gilt offenbar $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
5) $\Leftrightarrow$ 4). Übung mit Hilfe von Beispiel von 5.15 2). q. e. d.

Sofort klar ist die folgende Bemerkung:

Bemerkung 5.19. 1) Affine Abhängigkeit von Tupeln bleibt erhalten unter beliebigen affinen Abbildungen.
2) Affine Unabhängigkeit bleibt unter injektiven affinen Abbildungen erhalten.

Satz 5.20. *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem endlich erzeugten K-Vektorraum V. Dann operiert $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ regulär auf der Menge der affinen Basen von $\mathcal{A}$. Letztere bilden eine der Bahnen von $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ auf $\mathcal{A}^{n+1}$, wo $n = \operatorname{Dim}\mathcal{A}$.*

Beweis. Sofort aus Satz 5.14 und Bermerkung 5.18. q. e. d.

Satz 5.21. *1)$\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ operiert transitiv auf der Menge $\mathcal{A}^3_{generisch}$ der affin unabhängigen Tripel in $\mathcal{A}^3$ (nicht entartete Dreiecke), falls $\operatorname{Dim}(\mathcal{A}) > 1$.*
2)Eine trennende Invariante für die Operation von $\operatorname{Aff}(\mathcal{A})$ auf der Menge $\mathcal{A}^3_{spez} := \{P = (P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^3 | P_1 \neq P_2, P \text{ kollinear }\}$ ist das Teilverhältnis. Dabei ist das Teilverhältnis $\operatorname{TV}(P)$ von $P \in \mathcal{A}^3_{spez}$ definiert als das eindeutige $a \in K$ mit $\overrightarrow{P_1P_3} = a\overrightarrow{P_1P_2}$.

Beweis. 1) Wir können oBdA in $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varphi) \subset \tilde{V}$ arbeiten. Offenbar hat $\tilde{V}$ eine Basis $B \in \mathcal{A}^{n+1}$ und jedes affin unabhängige Tripel $P \in \mathcal{A}^3$ kann zu einer solchen Basis $\hat{P} \in \mathcal{A}^{n+1}$ von $\tilde{V}$ ergänzt werden. Es genügt nun zu zeigen, daß ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ existiert, mit $f((B_1, B_2, B_3)) = P$. Dies ist aber klar, denn ein solches f wird induziert von der eindeutigen linearen Abbildung von $\tilde{V}$, die B auf $\hat{P}$ abbildet.
2) Daß eine Invariante vorliegt, ist klar. Um zu zeigen, daß sie die Bahnen trennt, gehen wir wieder von der Situation des Beweises von 1) aus mit der Basis B. Sei $P \in \mathcal{A}^3_{spez}$ mit Teilverhältnis $a \in K$. Es genügt zu zeigen, daß ein $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ existiert mit $f((B_1, B_2, B_1 + a(B_2 - B_1))) = P$. Zu diesem Zweck ergänzt man (P_1, P_2) zu einer Basis $\hat{P} \in \mathcal{A}^{n+1}$ von $\tilde{V}$. Die lineare Abbildung, die B auf $\hat{P}$ abbildet, induziert den gewünschten affinen Automorphismus. q. e. d.

Aus dem letzten Beweis erhalten wir eine Folgerung, die eine sehr anschauliche Vorstellung von der affinen Gruppe liefert.

Korollar 5.22. *Sei* $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}) = n$. *Dann operiert* $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *transitiv auf* $\mathcal{A}^k_{generisch} := \{P \in \mathcal{A}^k | P$ *affin unabhängig*$\}$*, der Menge der affin unabhängigen* k*-Tupel* (($k-1$)*-Simplizes*) *für* $1 \leq k \leq n+1$. *Im Falle* $k = n+1$ *ist der Stabilisator eines solchen Tupels ist trivial, d. h. in diesem Falle ist die Operation regulär, vgl. Satz 5.20.*

Wenn man bedenkt, daß ein affin unabhängiges $(n+1)$-Tupel P in einem n-dimensionalen affinen Raum eine Fahne festlegt, nämlich $\{P_1\} \subset \langle P_1, P_2\rangle_a \subset \ldots \subset \langle P_1, \ldots, P_{n+1}\rangle_a = \mathcal{A}$, so bekommt man eine weitere Folgerung.

Korollar 5.23. $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *operiert transitiv auf der Menge der Fahnen von* $\mathcal{A}$.

Übung: Man bestimme den Stabilisator einer Fahne. Hinweis: Zeige zuerst: die Operation von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathcal{A})}(P_1)$ auf $\mathcal{A}$ ist ähnlich zu der von $\mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

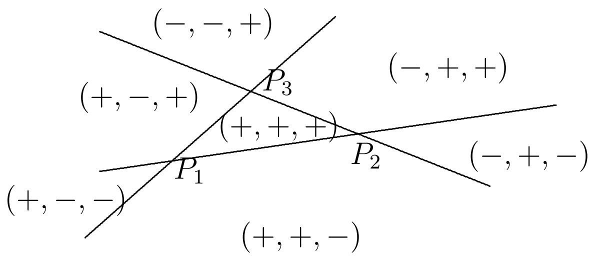
Übung: Gib eine trennende Invariante auf der Menge

$$\mathcal{A}^4_{spez} := \{P \in \mathcal{A}^4 | P \text{ affin abhängig}, (P_1, P_2, P_3) \text{ affin unabhängig}\}$$

an, welche eine echte Teilmenge der ebenen Vierecke ist. (Hinweis: Betrachte $\beta^{-1}(P_4)$, wo $\beta : \mathcal{A}^b_2(K) \to \langle P\rangle_a$ der eindeutige affine Isomorphismus ist mit $\beta((I_3)_{-,i}) = P_i$ für $i = 1, 2, 3$.)

Übung: Man verifiziere und diskutiere die Vorzeichenverteilung bei den ebenen baryzentrischen reellen Koordinaten gemäß der Vorgabe der vorigen Aufgabe. Für das Innere des Dreiecks kann man sich eine Massenverteilung an den Punkten P_1, P_2, P_3 vorstellen mit

Gesamtmasse 1. Der durch die Koordinaten angesprochene Punkt ist dann der Schwerpunkt.



Wir wollen jetzt erste geometrische Sätze beweisen. Den ersten Satz kann man als weitgehende Verallgemeinerung einer Version des Strahlensatzes auffassen.

Satz 5.24. *Sei* $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}) = n$ *und* H_i *für* $i = 1, 2, 3$ *Hyperebenen in* $\mathcal{A}$*, also affine Teilräume der Dimension* $n - 1$*.* H_1, H_2, H_3 *seien parallel und* $H_1 \neq H_2$*.*
1) Jede Gerade (= 1-dimensionaler affiner Teilraum von $\mathcal{A}$*), die nicht schwach parallel zu* H_1 *ist, hat genau einen Schnittpunkt mit* H_i *für* $i = 1, 2, 3$*. (Die Schnittpunkte sind offenbar kollinear.)*
2) Das Teilverhältnis der drei Schnittpunkte aus 1) ist unabhängig von der Wahl der Geraden und legt H_3 *auf Grund der Nebenbedingungen* $\mathrm{Dim}\, H_3 = n-1, H_3 \parallel H_1$ *eindeutig fest.*

Beweis. 1. Beweis. Sei $W := \mathcal{T}(H_1) = \mathcal{T}(H_2) = \mathcal{T}(H_3)$. Wir betrachten $\mathcal{A}/W := \{P + W | P \in \mathcal{A}\}$ als eindimensionalen affinen Raum und beachten, daß $\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/W : P \mapsto P + W$ eine affine Abbildung ist. Für jede Gerade G, wie in 1) spezifiziert, ist $\nu_{|G}$ ein affiner Isomorphismus. Klar: Die Schnittpunkte sind $\nu_{|G}^{-1}(H_i)$ und die Behauptung über die Teilverhältnisse folgt auch, da diese bei Anwendung von affinen Isomorphismen fest bleiben.
2. Beweis. Sei G eine Gerade wie in 1) angegeben. Dann gilt $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(H_1) \oplus \mathcal{T}(G)$. Entsprechend haben wir eine affine Abbildung, genauer eine *Parallelprojektion*, von $\mathcal{A}$ entlang $\mathcal{T}(H_1)$ auf G, nämlich

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : P \mapsto P' \text{ mit } \{P'\} = (P + \mathcal{T}(H_1)) \cap G.$$

(Man muß nachrechnen, daß dies eine affine Abbildung ist. Die Projektionseigenschaft ist klar.) Jetzt kann der Beweis analog zum ersten Beweis fortgesetzt werden. q. e. d.

Übung: Definiere Parallelprojektionen allgemein.

Übung: Zeige, daß in der affinen Ebene zwei Geraden sich entweder schneiden oder parallel sind. Genauer: Studiere die Bahnen unter der ebenen affinen Gruppe auf der Paarmenge der Geraden in der affinen Ebene.

Wurde der letzte Satz mit Hilfe von Parallelprojektionen bewiesen, so benötigen wir für den nächsten Satz Streckungen, also affine Abbildungen der Form

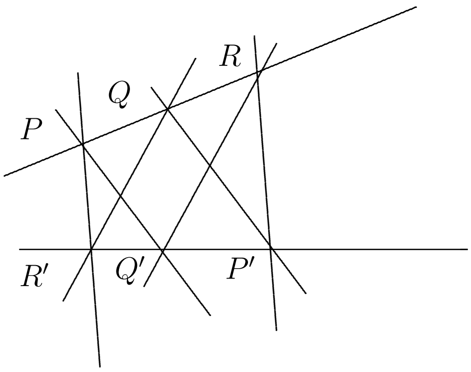
$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} : P \mapsto P_0 + a\overrightarrow{P_0P},$$

wobei das feste $P_0 \in \mathcal{A}$ das Streckzentrum ist und das feste $a \in K^*$ der Streckfaktor. Z. B. kann man sie benutzen, um den Strahlensatz zu beweisen.

Übung: Zeige: Je zwei Streckungen von $\mathcal{A}$ sind konjugiert in $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ genau dann, wenn sie denselben Streckfaktor haben. Die Streckungen zusammen mit den Translationen bilden eine Gruppe isomorph zur Matrixgruppe

$$\{\left(\begin{array}{c|c} aI_n & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in K^*, t \in K^{n\times 1}\}.$$

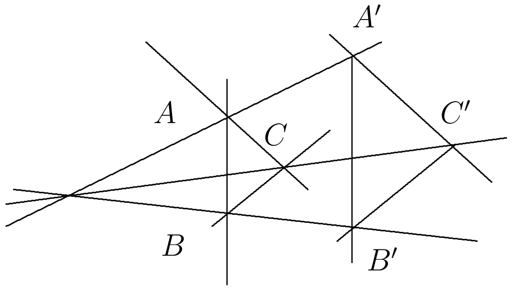
Satz 5.25. (Pappos) *Seien* $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}) = 2$ *und* D, D' *zwei Geraden in* $\mathcal{A}$ *mit sechs verschiedenen Punkten* $P, Q, R \in D$, $P', Q', R' \in D'$, *von denen keiner in* $D \cap D'$ *liegt. Gilt* $\langle P, Q'\rangle_a \parallel \langle Q, P'\rangle_a$ *und* $\langle Q, R'\rangle_a \parallel \langle R, Q'\rangle_a$, *so folgt* $\langle P, R'\rangle_a \parallel \langle R, P'\rangle_a$.



Beweis. Falls D und D' sich schneiden, arbeitet man mit den beiden Streckungen mit Zentrum $D \cap D'$, die P in Q und somit auch Q' in P' überführen bzw. Q nach R und somit auch R' nach Q' überführen. Die Komposition der beiden überführt P nach R und gleichzeitig R' nach P', da die Multiplikation in K kommutativ ist. Falls D und D' sich nicht schneiden, arbeitet man mit Translationen, denn dann sind D und D' parallel. q. e. d.

Eigentlich ist der Satz von Pappos ein Satz, der zur projektiven Geometrie gehört. Ähnlich ist es mit dem Satz von Desargues, der sich im affinen Raum abspielt. Der Beweis, den ich geben werde, ist vielleicht vom synthetisch-geometrischen Standpunkt aus nicht schön, demonstriert aber die Descartessche Idee, durch Einführung von Koordinaten geometrische Sätze durch algebraische Rechnungen zu beweisen. Für kompliziertere Situationen kann man sogar Computer heranziehen, um derartige Beweise "durchzurechnen".

Satz 5.26. *(DESARGUES[2]) Seien $(A, B, C), (A', B', C') \in \mathcal{A}^3_{generisch}$ zwei nicht entartete Dreiecke, die keine Eckpunkte gemeinsam haben und für die $\langle A, B\rangle_a \parallel \langle A', B'\rangle_a$, $\langle B, C\rangle_a \parallel \langle B', C'\rangle_a$, $\langle A, C\rangle_a \parallel \langle A', C'\rangle_a$. Dann schneiden sich die drei Geraden $\langle A, A'\rangle_a$, $\langle B, B'\rangle_a$, $\langle C, C'\rangle_a$ in einem gemeinsamen Punkt oder sind paarweise parallel.*



Beweis. Da die beiden Dreiecke nicht entartet sind, erzeugen sie einen drei- oder zweidimensionalen affinen Raum. Wir behandeln zunächst den ersten Fall: OBdA ist (A, B, C, A') nicht komplanar. Dann können wir affine Koordinaten $\kappa : \langle A, B, C, A', B', C'\rangle_a \to \mathcal{A}_0(K^{3\times 1})$ so wählen (wir arbeiten hier nicht mit $\mathcal{A}_n(K)$, weil es uns nicht weiter hilft!), daß

$$\kappa(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \kappa(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Wegen der Parallelität der Seiten folgt durch kurze Rechnung

$$\kappa(B') = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \kappa(C') = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

für ein $a \in K$. Da (A', B', C') nicht kollinear ist, folgt $a \neq 0$. Im Falle $a = 1$ sind die drei Geraden $\langle A, A'\rangle_a, \langle B, B'\rangle_a, \langle C, C'\rangle_a$ parallel. Anderenfalls schneiden sie sich in dem Punkt mit den Koordinaten $(0, 0, \frac{1}{1-a})^{tr}$.
Den ebenen Fall bekommt man als Folgerung aus dem 3-dimensionalen Fall, indem man längs einer geeigneten Geraden auf die von A, B, C erzeugte Ebene parallelprojiziert. (Einzelheiten Übung). q. e. d.

Übung: (DESARGUES). Im affinen Raum sind ein Punkt S und zwei nicht entartete Dreiecke $(A, B, C), (A', B', C')$ gegeben, so daß alle sieben Punkte verschieden sind, die drei Geraden $\langle S, A\rangle_a, \langle S, B\rangle_a, \langle S, C\rangle_a$ verschieden sind und $A' \in \langle S, A\rangle_a, B' \in \langle S, B\rangle_a, C' \in \langle S, C\rangle_a$ gilt. Sind $\langle A, B\rangle_a \parallel \langle A', B'\rangle_a$ und $\langle B, C\rangle_a \parallel \langle B', C'\rangle_a$, so folgt $\langle A, C\rangle_a \parallel \langle A', C'\rangle_a$.

Übung: Sei K ein Körper mit $6 \cdot 1 \neq 0$. Man definiere die Seitenhalbierenden eines nichtentarteten Dreiecks (A, B, C) und zeige, daß diese sich in einem Punkte S schneiden, so daß das Teilverhältnis $\mathrm{TV}(A, a, S) = 2/3$ ist, wo a der Mittelpunkt von (C, B) ist.