Kapitel 5

Affine Geometrie

Lernziele 10.

- *Definition und Modelle des affinen Raumes,*
- *affine Abbildungen,*
- *Invarianten der affinen Geometrie.*

5.1 Der affine Raum

In der affinen Geometrie hat man einen Punktraum, dessen Punkte in Bijektion zu einem Vektorraum stehen, welcher in bestimmter Weise auf dem Punktraum (durch Translationen oder Verschiebungen) operiert. Der wesentliche Unterschied zum Vektorraum besteht darin, daß kein Punkt (Nullpunkt) mehr ausgezeichnet ist. Begriffe wie Geraden, Ebenen etc. lassen sich leicht als sogenannte affine Unterräume definieren.

Definition 5.1. Sei V ein K-Vektorraum. Ein *affiner Raum* über V ist eine nicht leere Menge $\mathcal{A}$, genannt Punktmenge, auf der V regulär [1] operiert. Genauer ist ein affiner Raum ein Tripel $(\mathcal{A}, V, \tau)$, wobei

$$\tau : V \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : (v, P) \mapsto \tau_v(P)$$

eine reguläre Operation des Vektorraumes V auf dem Punktraum $\mathcal{A}$ ist. Die Abbildung $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt die *Translation* um den Vektor v von $\mathcal{A}$. Der Vektorraum V wird auch als *Translationsraum* von $\mathcal{A}$ bezeichnet: $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := V$. (Bezeichnung: Oft schreiben wir $v+P$ oder $P + v$ anstatt $\tau_v(P)$. Diese Schreibweise soll nicht implizieren, daß $\mathcal{A} = V$ ist.)

Bemerkung 5.2. Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V.
1) Für jeden Punkt $P_0 \in \mathcal{A}$ ist

$$V \to \mathcal{A} : v \mapsto \tau_v(P_0)$$

[1] Da V eine abelsche Gruppe ist, sind die Begriffe „reguläre Operation“ einerseits sowie „treue und transitive Operation“ andererseits äquivalent.

eine Bijektion.
2) Für jedes Punktepaar $(P,Q) \in \mathcal{A}^2$ gibt es genau einen Vektor $v \in V$ mit $\tau_v(P) = Q$. Bezeichnung: $v =: \overrightarrow{PQ}$.

Beweis. Spezialfall von Satz 6.4 q. e. d.

Übung: Zeige für $P, Q, P', Q' \in \mathcal{A}$ gilt $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$. (Hinweis: Skizze!)

Hier sind einige Modelle für affine Räume. Die Beispiele 2) und 2') sind aus Gründen, die bald klar werden, vorzuziehen. Die Modelle 1) und 1') sind verbreiteter.

***Beispiel* 5.3.** 1) Sei V ein K-Vektorraum. Dann ist $\mathcal{A}_0(V) := V$ ein affiner Raum mit Operation

$$\tau : V \times \mathcal{A}_0(V) \to \mathcal{A}_0(V) : (v, P) \mapsto v + P.$$

2) Ist $\tilde{V}$ ein K-Vektorraum mit nicht verschwindender Linearform $\varphi : \tilde{V} \to K$. Setze $V := \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathcal{A}(\varphi) := \varphi^{-1}(\{1\})$. Dann ist $(\mathcal{A}(\varphi), V, \tau)$ mit

$$\tau : V \times \mathcal{A}(\varphi) \to \mathcal{A}(\varphi) : (v, P) \mapsto v + P \text{ in } \tilde{V} \text{ gerechnet}$$

ein affiner Raum.
1') $\mathcal{A}_0(K^{n\times 1})$ heißt der *standardaffine Raum* der n-Spalten über K.
2') Wir setzen speziell für $\tilde{V} = K^{(n+1)\times 1}$ und $\varphi \in (K^{(n+1)\times 1})^*$ die Projektion auf die letzte Komponente:

$$\mathcal{A}_n(K) := \mathcal{A}(\varphi) = \{\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} | v \in K^{n\times 1}\}$$

und nennen ihn den *n-dimensionalen affinen Standardraum*. Genau genommen ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_n(K)) = \{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} | v \in K^{n\times 1}\},$$

was wir aber mit dem Vektorraum $K^{n\times 1}$ identifizieren.
2") Wir setzen speziell für $\tilde{V} = K^{(n+1)\times 1}$ und $\varphi \in (K^{(n+1)\times 1})^*$ die Summe der Komponenten:

$$\mathcal{A}_n^b(K) := \mathcal{A}(\varphi) = \{v \in K^{(n+1)\times 1} | (1, \dots, 1)v = 1\}$$

und nennen ihn den n-dimensionalen *affinen baryzentrischen Standardraum*. In diesem Fall ist

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_n^b(K)) = \{v \in K^{(n+1)\times 1} | (1, \dots, 1)v = 0\}.$$

Wir kommen zur Definition affiner Teilräume.

Definition 5.4. Sei $(\mathcal{A}, V, \tau)$ affiner Raum über dem K-Vektorraum V. $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ heißt *affiner Teilraum* von $\mathcal{A}$, falls ein Teilvektorraum $W \leq V$ existiert, so daß $(\mathcal{A}', W, \tau_{|W\times\mathcal{A}'})$ ein affiner Raum über W ist.

Bemerkung 5.5. Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über $V := \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
1) Der Translationsraum eines affinen Teilraums $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ ist eindeutig bestimmt, nämlich

$$T(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{A}'\}.$$

2) Zu jedem $W \leq V$ und jedem $P \in \mathcal{A}$ gibt es genau einen affinen Teilraum $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ mit $P \in \mathcal{A}'$ und Translationsraum $\mathcal{T}(\mathcal{A}') = W$, nämlich $P + W = W + P := \tau(W \times \{P\})$, die Bahn von P unter W.

Beweis. 1) Sofort aus 5.2. 2) Existenz: Verifiziere Eigenschaften für $P + W$. Eindeutigkeit analog zu 1). q. e. d.

Nun können wir auch die Dimension eines affinen Teilraums definieren.

Definition 5.6. Sei $(\mathcal{A}, V, \tau)$ affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Man nennt $\operatorname{Dim} \mathcal{A} := \operatorname{Dim} \mathcal{T}(\mathcal{A})$ die *Dimension* des affinen Raumes $\mathcal{A}$.

Lemma 5.7. *Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über $V := \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $(\mathcal{A}_1', W_1, \tau_{|W_1 \times \mathcal{A}_1'})$ und $(\mathcal{A}_2', W_2, \tau_{|W_2 \times \mathcal{A}_2'})$ affine Teilräume von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \varnothing$ oder ein ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $W_1 = T(\mathcal{A}_1)$ und $W_2 = T(\mathcal{A}_2)$. Dann ist $(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, W_1 \cap W_2, \tau_{|(W_1 \cap W_2) \times (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)})$ ein affiner Teilraum. Wir müssen zeigen, dass $\tau_{|(W_1 \cap W_2) \times (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)})$ eine reguläre Operation von $W_1 \cap W_2$ auf $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ definiert. Sei also $w \in W_1 \cap W_2$ und $P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Dann ist $\tau_w(P) \in \mathcal{A}_1$ und $\tau_w(P) \in \mathcal{A}_2$, also $\tau_w(P) \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Also erhalten wir eine Operation. Angenommen $P, Q \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Dann existiert ein eindeutiges $v \in V$ mit $\tau_v(P) = Q$. Da $P, Q \in \mathcal{A}_i$ ist $v \in W_i$, d.h. $v \in W_1 \cap W_2$. Also ist die Operation transitiv. Sie ist regulär, denn V ist regulär auf $\mathcal{A}$. q. e. d.

Definition 5.8. Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über $V := \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}' \neq \varnothing$. Dann ist

$$\langle \mathcal{A}' \rangle_{aff} = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ affiner Teilraum} \\ \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

der von *$\mathcal{A}'$ erzeugte affine Teilraum von $\mathcal{A}$.*

Wir können bereits einige geometrische Begriffe über die gegenseitige Lage affiner Teilräume zueinander angeben. Daß diese Begriffe jedoch geometrisch sinnvoll sind, d.h. Invarianzeigenschaften gegenüber der affinen Gruppe haben, können wir erst einsehen, wenn wir über affine Abbildungen gesprochen haben.

Definition 5.9. Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = V$ mit affinen Teilräumen $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$.
1) Die Teilräume heißen *parallel*, falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}') = \mathcal{T}(\mathcal{A}'')$.
2) Sie heißen *schwach parallel*, falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}') \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}'')$ oder $\mathcal{T}(\mathcal{A}'') \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A}')$.
3) Sie heißen *windschief*, falls $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ und $\mathcal{T}(\mathcal{A}'') \cap \mathcal{T}(\mathcal{A}') = \{0\}$.

Übung: Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem Vektorraum V. Zeige, daß Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller affinen Teilräume von $\mathcal{A}$ ist. Zeige weiter, daß die Äquivalenzklasse mit zugehörigem Teilraum $W \leq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ wiederum einen affinen Raum $\mathcal{A}/W$ bildet, und zwar mit Translationsraum V/W. Man nennt $\mathcal{A}/W$ auch den Bahnenraum von $\mathcal{A}$ mod W. (Beachte: V operiert zwar auch transitiv auf $\mathcal{A}/W$, aber nicht treu, es sei denn $W = \{0\}$.)

Übung: Ist $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V, und sind $U, W \leq V$ Teilräume, so gilt für die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/U \times \mathcal{A}/W : P \mapsto (P + U, P + W),$$

1.) φ ist injektiv genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.
2.) φ ist surjektiv genau dann, wenn $U + W = V$.

5.2 Affine Abbildungen

Nun kommen wir zur Definition affiner Abbildungen. Diese bilden einen ganz wesentlichen Bestandteil der Definition des affinen Raumes, weil wir sonst nicht wissen, wie wir vergleichen können. Es liefert auch eine neue Charakterisierung der affinen Teilräume: Die nicht leeren Fasern affiner Abbildungen werden die affinen Teilräume sein.

Definition 5.10. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ affine Räume über den K-Vektorräumen V, V'.
$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt *affine Abbildung*, falls eine K-lineare Abbildung $\overline{f} : V \to V'$ existiert mit $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overline{f}(\overrightarrow{PQ})$ für alle $P, Q \in \mathcal{A}$. $\overline{f}$ heißt auch der **lineare Anteil** von f.

Lemma 5.11. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ affine Räume über den K-Vektorräumen V, V'.
$f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affine Abbildung. Dann ist $\overline{f}$ ist durch f eindeutig festgelegt.*

Beweis. Angenommen $\varphi : V \to V'$ ist linear mit $\varphi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ für alle $P, Q \in \mathcal{A}$. Da $V = T(\mathcal{A}) = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{A}\}$ ist $\varphi = \overline{f}$. q. e. d.

Anschaulich interpretieren wir die Bedingung so: Ist $P \in \mathcal{A}$, so liefert $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ eine Identifikation von $\mathcal{A}$ mit V und $S \mapsto \overrightarrow{f(P)S}$ eine Identifikation von $\mathrm{Bild}(f)$ mit $\mathrm{Bild}(\overline{f})$. Im Sinne dieser Identifikation ist f dann eine lineare Abbildung, nämlich $\overline{f}$. Es kommt hinzu, daß $\overline{f}$ unabhängig von der Wahl von P ist.

Übung: Translationen sind affine Abbildungen, deren linearer Anteil die Identität des Translationsraumes ist. Sie sind auch die einzigen affinen Abbildungen eines affinen Raumes in sich mit dieser Eigenschaft.

Bemerkung 5.12. Für den bijektiven Fall fällt die Definition der affinen Abbildung ziemlich genau mit der Ähnlichkeit von Gruppenoperationen in Definition 6.8 zusammen, lediglich der Gruppenisomorphismus ρ in 6.8 ist ein etwas speziellerer Isomorphismus $\overline{f}$ von Vektorräumen. Beachte $\hat{v} = \tau_v$. Also das Diagramm aus 6.8 wird zu

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\hat{v}=\tau_v} & \mathcal{A} \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow[\widehat{\overline{f}(v)}=\tau_{\overline{f}(v)}]{} & \mathcal{A}' \end{array}$$

mit $v \in V$.

Satz 5.13. *1) Kompositionen affiner Abbildungen sind affin: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affine Räume über K-Vektorräumen mit affinen Abbildungen $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ und $f' : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$, so ist $f' \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ affin mit $\overline{f' \circ f} = \overline{f'} \circ \overline{f}$.*
2) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und bijektiv, so ist $f^{-1} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ ebenfalls affin mit $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$. (Man sagt, f ist ein affiner Isomorphismus.*) Insbesondere ist*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{A} | f \text{ affin und bijektiv } \}$$

eine Gruppe (Untergruppe von $S_{\mathcal{A}}$, der symmetrischen Gruppe von $\mathcal{A}$), genannt die affine Gruppe *von $\mathcal{A}$, und*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) : f \mapsto \overline{f}$$

ein Homomorphismus von Gruppen.
3) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$, so ist $f(\mathcal{A}'')$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{T}(f(\mathcal{A}'')) = \overline{f}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.
4) Ist $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin und $\mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}'$, so ist $f^{-1}(\mathcal{A}'')$ leer oder ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{A}'')) = \overline{f}^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{A}''))$.