Bei HERMITEschen Sesquilinearformen kann man wieder Orthogonalbasen definieren. Hierzu existiert ein Algorithmus zum Auffinden den Orthogonalbasen. Im Spezialfall von HERMITEschen inneren Produkten ist dieser Algorithmus eine Modifikation des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens.

Bemerkung 4.21. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum .
1.) $\mathrm{GL}(V)$ operiert reell linear auf $\mathrm{Sesq}_+(V)$ durch

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Sesq}_+(V) \to \mathrm{Sesq}_+(V) : (g, \Phi) \mapsto g\Phi$$

mit

$$(g\Phi)(v, w) = \Phi(g^{-1}(v), g^{-1}(w)).$$

Der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(\Phi) := \{g \in G \mid g\Phi = \Phi\}$ wird mit $\mathrm{U}(V, \Phi)$ bezeichnet und heißt *unitäre Gruppe* von (V, Φ).
2.) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ operiert reell linear auf $\mathbb{C}^{n\times n}_{Herm}$ durch

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} \to \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} : (g, F) \mapsto (g^{-1})^* F g^{-1}.$$

Den Stabilisator von $F = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-k})$ bezeichnet man mit $\mathrm{U}(k, n-k, \mathbb{C})$.
3.) Die beiden Operationen aus 1) und 2) sind reell linear ähnlich.
4.) Wie im SYLVESTERschen Trägheitssatz 4.13 bilden die Matrizen

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{a_+}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{a_-}, \underbrace{0, \dots, 0}_{a_0})$$

ein Vertretersystem der Bahnen in 2.) und die Signatur $(a_+, a_-, a_0) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ mit $a_+ + a_- + a_0 = n$ ist wohldefiniert für alle HERMITEschen Formen bzw. Matrizen.

<u>Beweis.</u> Übung. Nur ein Wort zur Wohldeniertheit der Signatur: $2(a_+, a_-, a_0)$ ist die Signatur der induzierten reellen symmetrischen Bilinearform. q. e. d.

4.5 Spektralsatz und unitäre Gruppe

Lernziele 9.
- *Komplexe innere Produkträume,*
- *komplexer Spektralsatz für normale Abbildungen,*
- *Rolle der unitären Gruppe*

Jetzt wollen wir uns der Theorie der unitären Vektorräume zuwenden. Für den Rest dieses Abschnittes sei (V, Φ) ein fester unitärer Vektorraum. Φ ist dann eine positiv definite HERMITEsche Sesquilinearform, also ein HERMITEsches inneres Produkt. Ergänzt man den Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsalgorithmus (siehe Übung 47(a)) um eine Normierung am Ende, so erhält man das folgende Korollar:

Korollar 4.22. *Sei (V, Φ) ein unitärer Vektorraum. Dann gibt es eine Orthonormalbasis (kurz ONBasis) B für (V, Φ), d. h. ${}_B\Phi^B = I_n$.*

Hier eine Liste der elementaren Resultate über EUKLIDische Vektorräume, die sich ohne Aufwand übertragen:

Satz 4.23. *Sei (V, Φ) ein unitärer Vektorraum.*

1. *Es gilt die* CAUCHY-SCHWARZ*sche Ungleichung*

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \Phi(v,v) & \Phi(v,w) \\ \Phi(w,v) & \Phi(w,w) \end{pmatrix} = \Phi(v,v)\Phi(w,w) - |\Phi(v,w)|^2 \geq 0$$

für alle $v, w \in V$ mit Gleichheit genau dann, wenn (v, w) linear abhängig ist.

2. *Die* Länge *$|v|$ eines Vektors $v \in V$ kann definiert werden durch*

$$|v| := \sqrt{\Phi(v,v)},$$

so daß die Dreiecksungleichung *für alle $v, w \in V$ gilt :*

$$\boxed{|v + w| \leq |v| + |w|}.$$

3. Winkel *zwischen Vektorpaaren $(v, w) \in V^2$ mit $v \neq 0, w \neq 0$ sind definiert durch*

$$\boxed{\cos(\angle(v,w)) = \frac{\Re(\Phi(v,w))}{|v| \cdot |w|}}.$$

mit $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi(:=$ kleinste positive Nullstelle von $\sin)$, wobei $\Re(z)$ den Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet.

4. *Für Teilmengen $M \subseteq V$ sind* Orthogonalräume *definiert durch*

$$M^\perp := \{v \in V | \Phi(w, v) = 0 \text{ für alle } w \in M\}.$$

Teilräume $U \leq V$ haben ein orthogonales Komplement *$U^\perp$ mit*

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Die Projektionen π_U und $\pi_{U^\perp}$ in dieser Zerlegung von V in Orthogonalräume werden Orthogonalprojektion *auf U bzw. $U^\perp$ genannt.*

5. *Ist weiter $v \in V$, so gilt*

$$|\pi_{U^\perp}(v)| = min\{|v - U| \; |U \in U\}$$

und das Minimum, genannt der Abstand *von v und U, wird durch genau einen Vektor von U angenommen, nämlich $\pi_U(v)$, auch* beste Approximation *von v an U genannt.*

6. $$U \mapsto \pi_U$$

liefert eine Bijektion zwischen den Teilräumen und den Orthogonalprojektionen von V.

Beweis. Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, kann man V auch als reellen Vektorraum auffassen. Wir schreiben hierfür kurz $V_{|\mathbb{R}}$. (Übung: $\mathrm{Dim}(V_{|\mathbb{R}}) = 2\,\mathrm{Dim}(V)$.)

$$\Psi : V_{|\mathbb{R}} \times V_{|\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \frac{1}{2}(\Phi(v, w) + \Phi(w, v)) = \Re(\Phi(v, w))$$

ist ein positiv definites Skalarprodukt auf $V_{|\mathbb{R}}$, denn $\Phi(v, v) = \Psi(v, v)$. Da $(V_{|\mathbb{R}}, \Psi)$ ein EUKLIDischer vektorraum ist, folgen Großteile der Behauptungen aus der entsprechenden Theorie des ersten Semesters. Rest und Einzelheiten: Übung. q. e. d.

Nun kommen wir zu der Spektraltheorie, die im komplexen Fall einfacher ist als im reellen. Zunächst haben wir wieder zu jedem Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ einen adjungierten Endomorphismus.

Satz 4.24. *Sei (V, Φ) ein unitärer Vektorraum. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ mit*

$$\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\alpha^{ad}(v), w) \text{ für alle } v, w \in V.$$

α^{ad} heißt die zu α **adjungierte** *(lineare) Abbildung. Ist $B \in V^n$ eine Basis von V, so gilt*

$${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}_B\Phi^B({}^B\alpha^B)({}_B\Phi^B)^{-1})^*,$$

insbesondere

$${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}^B\alpha^B)^*.$$

falls B eine ONBasis ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass falls α^{ad} existiert, so ist sie eindeutig, d.h. dass es also keine weitere Abbildung mit der definierenden Eigenschaft gibt. Denn angenommen $\beta \in \mathrm{End}(V)$ existiert mit $\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\beta(v), w)$ für alle $w \in V$. Dann ist $\Phi(\alpha(v), w) = \Phi(\beta(v), w)$ für alle $w \in V$ oder $\Phi((\alpha - \beta)(v), w) = 0$ für alle $w \in V$, d.h. $\alpha(v) - \beta(v) \in V^\perp = \{0\}$, also $\alpha(v) = \beta(v)$.

Nun zeigen wir die Existenz. Sei also $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dan definieren wir α^{ad} vermöge $\alpha^{ad}(v) = \sum_{i=1}^n \overline{\Phi(v, \alpha(b_i))} b_i$. Denn dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha^{ad}(v), b_j) &= \Phi(\sum_{i=1}^n \overline{\Phi(v, \alpha(b_i))} b_i, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi(v, \alpha(b_i)) \Phi(b_i, b_j) \\ &= \Phi(v, \alpha(b_j)) \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß α^{ad} als Abbildung wohldefiniert ist. Sei also $v \in V$. Wegen $V^\perp = \{0\}$ gibt es ein eindeutiges $v' \in V$ mit

$$\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(v', w) \text{ für alle } w \in V.$$

Damit ist $\alpha^{ad}(v) := v'$ wohldefiniert.

Darüber hinaus folgt auch, daß α^{ad} eindeutig definiert ist, daß es also keine weitere Abbildung mit der definierenden Eigenschaft gibt. Denn angenommen $\beta \in \mathrm{End}(V)$ existiert mit $\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\beta(v), w)$ für alle $w \in V$. Dann ist $\Phi(\alpha(v), w) = \Phi(\beta(v), w)$ für alle $w \in V$ oder $\Phi((\alpha - \beta)(v), w) = 0$ für alle $w \in V$, d.h. $\alpha(v) - \beta(v) \in V^\perp = \{0\}$. Daß α^{ad} linear ist, zeigt man analog (Übung).
Wir schreiben nun die definierende Gleichung in Matrixform:

$$\begin{aligned} \Phi(v, \alpha(w)) &= ({}^B v)^* {}_B\Phi^B ({}^B\alpha^{BB} w) \\ \shortparallel \quad & \\ \Phi(\alpha^{ad}(v), w) &= ({}^B(\alpha^{ad})^{BB} v)^* {}_B\Phi^{BB} w \\ &= ({}^B v)^* ({}^B(\alpha^{ad})^B)^* {}_B\Phi^{BB} w \end{aligned}$$

Also

$$({}^B(\alpha^{ad})^B)^* {}_B\Phi^B = {}_B\Phi^{BB} \alpha^B,$$

woraus die restlichen Behauptungen folgen. q. e. d.

Definition 4.25. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
1) α heißt *selbstadjungiert* (bzw. *antiselbstadjungiert*), falls $\alpha^{ad} = \alpha$ (bzw. $\alpha^{ad} = -\alpha$).
2) α heißt *normal*, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$.
3) α heißt *unitär*, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \mathrm{Id}_V$.
2')A heißt *normal*, falls $A^*A = AA^*$.
3') A heißt *unitär*, falls $A^*A = I_n$.

Bemerkung 4.26. Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ und $A := {}^B\alpha^B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für eine ONBasis von V.
1) α ist selbstadjungiert bzw. antiselbstadjungiert genau dann, wenn A selbstadjungiert bzw. schiefHERMITEsch ist.
2) α ist normal genau dann, wenn A normal ist.
3) α ist unitär genau dann, wenn A unitär ist.

Übung: Zeige: Die unitären Endomorphismen von (V, Φ) bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$. Diese heißt die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(V, \Phi)$ von (V, Φ). Ebenso bilden die unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ eine Untergruppe $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und

$$\mathrm{U}(V, \Phi) \to \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) : \alpha \mapsto {}^{B}\alpha^{B}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen, falls $B \in V^n$ eine ONBasis ist.

Übung: Eine Projektion $\pi \in \mathrm{End}(V)$ (also $\pi^2 = \pi$) ist Orthogonalprojektion genau dann, wenn π selbstadjungiert ist.

Der Hauptsatz ist nun der Spektralsatz, der nicht mehr in zwei Teilfälle unterteilt werden muß wie im reellen Fall.

Satz 4.27. *(Spektralsatz, komplexe Hauptachsentransformation)*
1) (Abbildungsversion) Sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ normal, wo (V, Φ) ein unitärer Vektorraum ist. Dann existiert eine ONBasis aus Eigenvektoren von α. Anders ausgedrückt: $\alpha = a_1\pi_1 + \cdots + a_k\pi_k$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, wo $\mathrm{Id}_V = \pi_1 + \cdots + \pi_k$ einer Zerlegung der 1 in Orthogonalprojektionen ist ($\pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}\pi_i$).
2) (Matrixversion) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal, so existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ mit U^*AU diagonal.

Beweis. Es genügt, 1) zu beweisen. Wir führen den Beweis zuerst für den Fall, daß α selbstadjungiert oder unitär ist. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, hat α mindestens einen Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ und einen Eigenvektor $b_1 \in V$ zum Eigenwert a. OBdA sei $|b_1| = 1$. Wir haben

$$V = \langle b_1\rangle \oplus \langle b_1\rangle^{\perp}.$$

Da α selbstadjungiert oder unitär ist, folgt aus der α-Invarianz von $\langle b_1\rangle$ diejenige von $\langle b_1\rangle^{\perp}$, so daß wir mit

$$\alpha_{|\langle b_1\rangle^{\perp}} : \langle b_1\rangle^{\perp} \to \langle b_1\rangle^{\perp}$$

fortfahren können. Nach n Schritten haben wir eine ONBasis aus Eigenvektoren.
Sei jetzt α lediglich normal. Dann ist $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$ selbstadjungiert, hat also eine Basis aus Eigenvektoren mit reellen nicht negativen Eigenwerten. Da α mit $\alpha^{ad} \circ \alpha$ vertauscht, wird jeder Eigenraum von $\alpha^{ad} \circ \alpha$ durch α in sich abgebildet (Übung!). Wir können also oBdA annehmen, daß $\alpha^{ad} \circ \alpha = a\,\mathrm{Id}_V$ gilt für ein reelles $a \geq 0$. (Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer selbstadjungierten Abbildung β so gilt für einen Eigenvektor v zu a dass $av = \beta(v) = \beta^{ad}(v)$ und also $a\Phi(v, v) = \Phi(v, av) = \Phi(v, \beta(v)) = \Phi(\beta^{ad}(v), v) = \Phi(av, v) = \overline{a}\Phi(v, v)$. Da $\Phi(v, v) \in \mathbb{R}$ und $\Phi(v, v) > 0$ folgt, dass $a = \overline{a}$, d.h. $a \in \mathbb{R}$. Wir nehmen oBdA an, dass $a \geq 0$, denn falls $a < 0$ so ersetzen wir $\alpha^{ad}\circ\alpha$ durch $-\alpha^{ad}\circ\alpha$, denn diese Abbildung ist auch selbstadjungiert und hat den Eigenwert $-a > 0$.) Der Fall $a = 0$ impliziert $\alpha = 0$. Im Fall $a > 0$ existiert $b > 0$ mit $b^2 = a$ und $\frac{1}{b}\alpha$ ist unitär, denn $(\frac{1}{b}\alpha)^{ad} \circ \frac{1}{b}\alpha = \frac{1}{b^2}\alpha^{ad} \circ \alpha = \frac{1}{b^2}a\,\mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_V$. Dieser Fall wurde aber schon oben behandelt. q. e. d.

Korollar 4.28. *Unitäre sowie (schief)HERMITEsche Matrizen sind diagonalisierbar mit einer unitären Transformation.*

Übung: Die Eigenwerte von unitären Matrizen haben Betrag 1, die von selbstadjungierten (= HERMITEschen) Matrizen sind reell, die von schiefHERMITEschen Matrizen sind rein imaginär und die von normalen Matrizen sind beliebig.

Wir schließen ab mit einigen Bemerkungen über die unitäre Gruppe. Die Beweise sind analog zu denen bei der orthogonalen Gruppe, nur einfacher.

Bemerkung 4.29. Sei (V, Φ) ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum. Dann gilt:
1) $\mathrm{U}(V, \Phi)$ operiert auf V^r durch

$$\mathrm{U}(V, \Phi) \times V^r \to V^r : (g, X) \mapsto gX := (g(X_1), \dots, g(X_r)).$$

Eine trennende Invariante dieser Operation ist die GRAM-Matrix:

$$\Gamma : V^r \to \mathbb{C}^{r \times r}_{Herm} : X \mapsto (\Phi(X_k, X_j))_{1 \leq k,j \leq r}$$

2) $\mathrm{U}(V, \Phi)$ operiert auf der Menge der Teilräume von V. Eine trennende Invariante dieser Operation ist die Dimension, denn jeder Teilraum hat eine Orthonormalbasis.

Was sagt diese Bemerkung für $r = 1$ aus? Die Bahnen auf V sind offenbar die Spären mit Mittelpunkt Null. Der zweite Teil der Bemerkung ist auf den ersten Blick estaumlich, denn die Matrixeinträge von $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ sind beschränkt durch 1. Die Werte der Determinanten unitärer Transformationen sind reichhaltiger als im orthogonalen Fall:

Übung: Ist $\alpha \in \mathrm{U}(V, \Phi)$, so gilt $|\operatorname{Det}(\alpha)| = 1$ und jede komplexe Zahl vom Betrag 1 kommt als Determinante einer unitären Transformation vor.

Schließlich überträgt sich auch noch die Polarzerlegung und die CAYLEY-Parametrisierung. Wir geben die Matrixversionen an; die Beweise übertragen sich vom orhogonalen Fall.

Satz 4.30. *(Polarzerlegung) Jedes $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ läßt sich eindeutig schreiben als $X = HU$ mit $H \in \mathbb{C}^{n \times n}_{herm}$ positiv definit und $U \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$.*

Man beachte, daß die Polarzerlegung im Falle $n = 1$ eine bekannte Sache ist und daß sich daher auch der Name erklärt.

Satz 4.31. *(CAYLEY-Parametrisierung)*

$$\zeta : \mathbb{C}^{n \times n}_{schiefh} \to \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) : S \mapsto (I_n - S)(I_n + S)^{-1}$$

ist eine wohldefinierte injektive Abbildung, deren Bild aus allen unitären Matrizen besteht, die -1 nicht als Eigenwert haben.