Kapitel 4

Allgemeine Bilinearformen und unitäre Vektorräume

4.1 Erinnerung an Bilinearformen und Matrizen

Definition 4.1. Sei V ein K-Vektorraum .
1) Eine Abbildung $\Phi : V \times V \to K : (v, w) \mapsto \Phi(v, w)$ heißt *Bilinearform* von V, falls Φ in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$\Phi(av + bv', w) = a\Phi(v, w) + b\Phi(v', w) \text{ für alle } a, b \in K, v, v', w \in V$$

und

$$\Phi(v, aw + bw') = a\Phi(v, w) + b\Phi(v, w') \text{ für alle } a, b \in K, v, w, w' \in V$$

Die Menge aller Bilinearformen von V bezeichnen wir mit $\mathrm{Bifo}(V)$.
2) Eine Bilinearform $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ heißt *symmetrisch* bzw. *schiefsymmetrisch*, falls $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ bzw. $\Phi(v, w) = -\Phi(w, v)$ für alle $v, w \in V$. Die Menge der symmetrischen Bilinearformen von V bezeichnen wir mit $\mathrm{Bifo}_+(V)$ und die Menge der schiefsymmetrischen mit $\mathrm{Bifo}_-(V)$. Ferner heißt $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ *alternierend*, falls $\Phi(v, v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt. Die Menge der alternierenden Bilinearformen wird mit $\mathrm{Bifo}_A(V)$ bezeichnet.

***Beispiel* 4.2.** Seien $\delta_1, \delta_2 \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ für einen beliebigen K-Vektorraum V. Dann ist

$$\delta_1 \otimes \delta_2 : V \times V \to K : (v, w) \mapsto \delta_1(v)\delta_2(w)$$

eine Bilinearform, die genau dann symmetrisch ist, wenn (δ_1, δ_2) linear abhängig ist. $\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1$ ist schiefsymmetrisch, sogar alternierend.

Das letzte Beispiel ist eine allgemeine Konstruktion, die uns schnell zu einer Basis von $\mathrm{Bifo}(V)$ für endlich erzeugte K-Vektorräume V führt.

Übung: Sei $\delta \in (V^*)^n$ eine Basis des Dualraumes V^* von V, so ist

$$(\delta_1 \otimes \delta_1, \delta_1 \otimes \delta_2, \ldots, \delta_1 \otimes \delta_n, \ldots, \delta_n \otimes \delta_n) \in \mathrm{Bifo}(V)^{n^2}$$

eine Basis von $\mathrm{Bifo}(V)$.

Der folgende Satz, der in Analogie zur Beschreibung von Endomorphismen durch Matrizen besteht, löst nicht nur diese Übungsaufgabe, sondern liefert gleichzeitig einen Kalkül zur Berechnung der Werte.

Satz 4.3. *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B \in V^n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Bifo}(V) \to K^{n\times n} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$$

ist ein Isomorphismus, wobei

$${}_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \to K : (i,j) \mapsto \Phi(b_i, b_j)$$

die GRAMmatrix von Φ heißt. Weiter gilt für alle $v, w \in V$:

$$\boxed{\Phi(v,w) = v_B \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^B w}$$

wobei $v_B := ({}^B v)^{tr}$.

4.2 Struktur eines Vektorraumes mit Bilinearform

Wir stellen wieder die Frage nach Invarianten, denn wir haben die offensichtliche Bemerkung:

Bemerkung 4.4.

$$\mathrm{GL}(n,K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n} : (g,F) \mapsto g^{-tr} F g^{-1}$$

ist eine Operation von $\mathrm{GL}(n,K)$ auf $K^{n\times n}$. Jede Bahn besteht aus den GRAMmatrizen ${}_B\Phi^B$ einer (festen) Bilinearform $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ bezüglich aller Basen $B \in V^n$ von V.

Offensichtliche Invarianten dieser Operation sind der Rang der GRAMmatrizen F und $\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\varphi_F)) = n - \mathrm{Rg}(F)$. Wir wollen diese interpretieren, was ihre Bedeutung für Bilinearformen ist. Dabei beschränken wir uns auf den Fall symmetrischer oder schiefsymmetrischen Bilinearformen, weil es manchmal verwirrend ist, zwischen Links- und Rechtsorthogonalität zu unterscheiden.

Definition 4.5. Sei $\Phi \in \mathrm{Bifo}_\pm(V)$, also $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$ oder $\Phi \in \mathrm{Bifo}_-(V)$.
1) Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^{\perp,\Phi} = M^\perp := \{v \in V \mid \Phi(w,v) = 0 \text{ für alle } w \in M\}$$

der *Orthogonalraum* von M bezüglich Φ.
2) $V^\perp$ heißt das *Radikal* von Φ.
3) Φ heißt *nicht ausgeartet*, falls $V^\perp = \{0\}$, anderenfalls *ausgeartet*.

Klar: $\mathrm{Dim}(V^\perp) = \mathrm{Dim}(V) - \mathrm{Rg}({}_B\Phi^B)$ für eine beliebige Basis B von V, insbesondere ist Φ genau dann nicht ausgeartet, wenn eine und damit jede GRAMmatrix Höchstrang hat. Wir stellen nun die Frage nach den einfachsten GRAMmatrizen zu einer vorgegebenen Bilinearform.

Bemerkung 4.6. Sei $\Phi \in \mathrm{Bifo}_\pm(V)$, V endlich erzeugter K-Vektorraum. Ist $V_{na} \leq V$ mit $V = V_{na} \oplus V^\perp$, dann ist $\Phi_{na} := \Phi_{|V_{na}\times V_{na}} \in \mathrm{Bifo}(V_{na})$ nicht ausgeartet und

$$ {}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} {}_{B'}\Phi_{na}^{B'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

wo $B \in V^n$ eine Basis von V ist mit $B' := (b_1, \ldots, b_s)$ eine Basis von V_{na} und $(b_{s+1}, \ldots, b_n)$ eine Basis von $V^\perp$.

Bevor wir die Suche nach besonders schönen Basen beginnen, brauchen wir den folgenden grundlegenden Satz.

Lemma 4.7. *Sei V endlich erzeugter K-Vektorraum mit Basis $B \in V^n$. Es ist $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ genau dann nicht auseartet, wenn $\mathrm{Rg}({}_B\Phi^B) = \mathrm{Dim}(V)$.*

<u>Beweis.</u> Angenommen $\mathrm{Rg}({}_B\Phi^B) = \mathrm{Dim}(V)$. Sei $v \in V - \{0\}$, etwa $v = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Dann ist $(c_1, \ldots, c_n)^{tr} := {}_B\Phi^{BB} v \neq 0$, d.h. es existierten $(d_1, \ldots, d_n) \in K^n$ mit $(d_1, \ldots, d_n) \cdot (c_1, \ldots, c_n)^{tr} \neq 0$. Setze $w = \sum_{i=1}^n d_i b_i$. Dann ist $\Phi(w, v) \neq 0$ und somit Φ nicht ausgeartet.

Sei andererseits $\mathrm{Rg}({}_B\Phi^B) < \mathrm{Dim}(V)$. Dann existiert ein $v \in V - \{0\}$, etwa $v = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ mit ${}_B\Phi^{BB} v = 0$, d.h. es existiert kein $w \in V$ mit ${}_B w_B \Phi^{BB} v \neq 0$. Also ist Φ ausgeartet. q. e. d.

Satz 4.8. *Sei V endlich erzeugter K-Vektorraum , $U \leq V$ und $\Phi \in \mathrm{Bifo}_\pm(V)$.*
1) Ist $\Phi_{|U\times U} \in \mathrm{Bifo}(U)$ nicht ausgeartet, so gilt

$$ V = U \oplus U^\perp. $$

2) Ist Φ nicht ausgeartet, so gilt

$$ \mathrm{Dim}(U) + \mathrm{Dim}(U^\perp) = \mathrm{Dim}(V). $$

<u>Beweis.</u> 1) Wegen $U^{\perp,\Phi_{|U\times U}} = U^\perp \cap U$ und der Voraussetzung, dass $\Phi_{|U\times U} \in \mathrm{Bifo}(U)$ nicht ausgeartet ist, ist $U^\perp \cap U = \{0\}$. Es bleibt also zu zeigen, daß $\mathrm{Dim}(U) + \mathrm{Dim}(U^\perp) = \mathrm{Dim}(V)$ gilt. Wähle eine Basis $(b_1, \ldots, b_d)$ von U und ergänze zu einer Basis $B = (b_1, \ldots, b_d, \ldots, b_n)$ von V. Es gilt

$$ U^\perp = \{v \in V \mid A^B v = 0\} $$

mit
$$A : \underline{d} \times \underline{n} \to K : (i,j) \mapsto \Phi(b_i, b_j).$$
Dann hat A Höchstrang, also $\mathrm{Rg}(A) = d$, denn $A_{|\underline{d}\times\underline{d}}$ ist die Matrix von $\Phi_{|U\times U}$ bezüglich $(b_1, \ldots, b_d)$. Damit folgt die Behauptung aus der bekannten Dimensionsformel für Lösungsräume homogener linearer Gleichungssysteme.
2) Wir argumentieren wie in 1), nur die Begründung, daß $\mathrm{Rg}(A) = d$ ist, ist anders: A besteht aus den ersten d Zeilen von ${}_B\Phi^B$. Diese Matrix hat aber Höchstrang n, denn Φ ist nicht ausgeartet. Also sind die Zeilen von A linear unabhängig, d. h. $\mathrm{Rg}(A) = d$. q. e. d.

4.3 Normalformen für Grammatrizen

Am einfachsten ist es eine Normalform für Grammatrizen bei alternierenden Formen herzustellen. Wir erinnern uns an die Bezeichnung $\Lambda^2(V^*)$ für die alternierenden Bilinearformen.

Satz 4.9. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\Phi \in \Lambda^2(V^*)$ nicht ausgeartet. (Man nennt dann Φ auch eine symplektische Form.) Dann ist $\mathrm{Dim}(V)$ gerade und es existiert eine Basis B von V mit*
$${}_B\Phi^B = \mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

Beweis. Wähle $b_1 \in V - \{0\}$ beliebig. Dann ist $\mathrm{Dim}(b_1^\perp) = \mathrm{Dim}(V) - 1$. Also erfüllt jedes $b_2' \in V - b_1^\perp$ die Ungleichung $\Phi(b_1, b_2') \neq 0$, d. h. es existiert ein eindeutiges $a \in K$, so daß $b_2 := ab_2'$ die Gleichung $\Phi(b_1, b_2) = 1$ erfüllt. Es gilt nach Satz 4.8 $V = \langle b_1, b_2\rangle \oplus \langle b_1, b_2\rangle^\perp$, so daß man mit $\langle b_1, b_2\rangle^\perp$, welcher von der Dimension $\mathrm{Dim}(V) - 2$ ist, weiterarbeiten kann. Die Behauptungen folgen durch vollständige Induktion. q. e. d.

Den gerade gesehenen Schluß kann man auch bei symmetrischen Bilinearformen einsetzen.

Satz 4.10. *Sei $2 \neq 0$ in K und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis $B \in V^n$, so daß ${}_B\Phi^B$ eine Diagonalmatrix ist. Eine derartige Basis B heißt Orthogonalbasis.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß Φ nicht ausgeartet ist wegen Bemerkung 4.6. Sei $v \in V - \{0\}$ beliebig.
Fall 1: $\Phi(v, v) \neq 0$. In diesem Fall setzte $b_1 := v$ und fahre mit $b_1^\perp$ fort, denn $V = \langle b_1\rangle \oplus b_1^\perp$.
Fall 2: $\Phi(v, v) = 0$. In diesem Fall wähle ein beliebiges $v' \in V - v^\perp$ Falls $\Phi(v', v') \neq 0$, sind wir wieder in Fall 1. Falls $\Phi(v', v') = 0$, können wir nach Normierung annehmen, daß $\Phi(v, v') = 1$ ist. Wir setzen $b_1 := v + v', b_2 := v - v'$. Dann sieht man leicht, dass $\Phi(b_1, b_1) \neq 0$, $\Phi(b_2, b_2) \neq 0$, und $\Phi(b_1, b_2) = 0$ (hier geht die Symmetrie ein). Nun fahren

wir mit $\langle b_1, b_2\rangle^\perp$ fort.
Beachte, in beiden Fällen ist die Einschränkung von Φ auf den Orthogonalraum nicht ausgeartet. q. e. d.

Übung: Ausgehend von der Transformationsformel in 1.9 formuliere man analog zum GAUSSschen Algorithmus einen Algorithmus, der eine Orthogonalbasis findet.

Wenn man nun weitergehen will, muß man besondere Eigenschaften des zugrunde liegenden Körpers K benutzen. Wir untersuchen den sehr einfachen Fall $K = \mathbb{C}$ und den interessanten Fall $K = \mathbb{R}$.

Satz 4.11. *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$. Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}_{sym}$ gibt es genau dann eine Basis B von V mit ${}_B\Phi^B = A$, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Dim}(V/V^\perp)$. Insbesondere hat V im Falle eines nicht ausgearteten Φ eine Orthonormalbasis, i.e. eine Basis B mit ${}_B\Phi^B = I_n$.*

Beweis. Nach dem letzten Satz 4.10 können wir annehmen, daß A Diagonalgestalt hat und daß wir bereits eine Orthogonalbasis $C = (v_1, \ldots, v_n)$ von V vorliegen haben. Ebenfalls können wir annehmen, daß einerseits $a_{11} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0$ und $a_{r+1,r+1} = \cdots = a_{n,n} = 0$ und andererseits $\Phi(v_1, v_1) \neq 0, \ldots, \Phi(v_r, v_r) \neq 0$ und $\Phi(v_{r+1}, v_{r+1}) \neq 0, \ldots, \Phi(v_n, v_n) \neq 0$. Für $1 \le i \le r$ haben wir dann $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ mit $\alpha_i^2 = a_{ii}$ und $\beta_i^2 = \Phi(v_i, v_i)$. Wir setzen $b_i := \alpha_i/\beta_i v_i$ für $1 \le i \le r$ und $b_i = v_i$ für $r < i \le n$. Dann gilt ${}_B\Phi^B = A$. q. e. d.

Im reellen Fall brauchen wir noch eine wichtige Definition, die wir zur Hälfte bereits bei den EUKLIDischen Vektorräumen behandelt hatten.

Definition 4.12. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$ heißt **positiv definit** (bzw. *negativ definit*), falls $\Phi(v, v) > 0$ (bzw. $\Phi(v, v) < 0$) für alle $v \in V - \{0\}$ gilt.

Satz 4.13. (SYLVESTER*scher Trägheitssatz) Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$. Für je zwei Orthogonalbasen von V stimmen die Anzahl a_+ der positiven Elemente, die Anzahl a_- der negativen und die Anzahl a_0 der Nullen auf der Diagonalen der* GRAM*matrizen überein. Die Differenz $a_+ - a_-$ der ersten beiden Anzahlen heißt auch der Index von Φ und das Tripel (a_+, a_-, a_0) die Signatur von Φ.*[1]

Beweis. Klar: $a_0 = \mathrm{Dim}(V^{\perp,\Phi})$. Sei o.B.d.A. Φ nicht ausgeartet. Wir haben offenbar $V = V_+ \oplus V_-$, wo V_+ von den b_i aus der Orthogonalbasis mit $\Phi(b_i, b_i) > 0$ und $V_- = V_+^\perp$ von den übrigen Basisvektoren. (Man beachte, daß diese Zerlegung mit der Orthogonalbasis variiert.) Offenbar sind die Einschränkungen von Φ auf V_+ und V_- positiv und negativ definit.
Sei nun eine weitere orthogonale Zerlegung $V = U_+ \oplus U_-$ gegeben mit $U_- = U_+^\perp$ und positiv bzw. negativ definiter Einschränkung von Φ auf U_+ bzw. U_-. Behauptung:

$\mathrm{Dim}(V_+) = \mathrm{Dim}(U_+)$.
Bew.: Angenommen z. B. $\mathrm{Dim}(V_+) < \mathrm{Dim}(U_+)$. Offenbar ist $U_+ \cap V_- = \{0\}$, da Φ sonst gleichzeitig positiv und negativ definit auf diesem Schnitt wäre. Also

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Dim}(V) & \geq & \mathrm{Dim}(U_+ + V_-) \\ & = & \mathrm{Dim}(U_+ \oplus V_-) \\ & = & \mathrm{Dim}(U_+) + \mathrm{Dim}(V_-) \\ & > & \mathrm{Dim}(V_+) + \mathrm{Dim}(V_-) \\ & = & \mathrm{Dim}(V). \end{array}$$

Dies ist offenbar ein Widerspruch und wir erhalten Gleichheit und damit die Behauptung.
q. e. d.

Übung: Unter einem total isotropen Teilraum U von V versteht man einen Teilraum mit $\Phi_{|(U\times U)} = 0$. Zeige: Je zwei maximal total isotrope Teilräume in V haben dieselbe Dimension ($K = \mathbb{R}$).

Übung: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\Phi \in \mathrm{Bifo}_+(V)$ und GRAM-Matrix A bezüglich einer Basis B. Zeige:
$a_+ =$ Anzahl (mit Vielfachheiten) der positiven Eigenwerte von A,
$a_- =$ Anzahl (mit Vielfachheiten) der negativen Eigenwerte von A,
$a_0 =$ Vielfachheit der Null als Eigenwert von A.

4.4 HERMITEsche Sesquilinearformen

Lernziele 8.
- HERMITE*sche Sesquilinearformen,*
- GRAM-*Matrizen und ihr Transformationsverhalten.*

Wir betrachten Sesquilinearformen und dann die unitären Vektorräume als wichtigsten Spezialfall. Die Theorie der Sesquilinearformen kommt sowohl in der Funktionalanalysis als auch in der Quantenmechanik zur Anwendung, ist aber auch für sich genommen wichtig. Außerdem ist es eine gute und nicht so langweilige Wiederholung der Abschnitte über EUKLIDische Vektorräume und über Bilinearformen, allerdings mit Variationen.

Erinnerung: Das komplexe Konjugieren $^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = a + bi \mapsto \overline{z} = a - bi$ ist ein Körperautomorphismus, also bijektiv, additiv und multiplikativ. Seine Fixpunkte sind genau die reellen Zahlen. Wir haben die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen Realteil $\mathfrak{R} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z = a + bi \mapsto a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und Imaginärteil $\mathfrak{I} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z = a + bi \mapsto b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. Schließlich haben wir noch den Betrag oder Absolutbetrag eine komplexen Zahl als $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Definition 4.14. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.
1) Eine Abbildung
$$\Phi : V \times V \to \mathbb{C} : (v, w) \mapsto \Phi(v, w)$$
heißt *Sesquilinearform*, falls Φ linear in der zweiten Komponente ist, d. h. für jedes $v \in V$ gilt
$$\Phi(v, aw + bw') = a\Phi(v, w) + b\Phi(v, w') \qquad w, w' \in V, a, b \in \mathbb{C}$$
und falls Φ *semilinear* in der ersten Komponente ist, d. h. für jedes $w \in V$ gilt
$$\Phi(av + bv', w) = \overline{a}\Phi(v, w) + \overline{b}\Phi(v', w) \qquad v, v' \in V, a, b \in \mathbb{C}.$$
2) Eine Sesquilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt HERMITE**sch** bzw. **schief**HERMITE**sch**, falls
$$\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)} \text{ für alle } v, w \in V$$
bzw.
$$\Phi(v, w) = -\overline{\Phi(w, v)} \text{ für alle } v, w \in V.$$
Man beachte, dass also $\Phi(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$. Die Mengen aller Sesquilinearformen, HERMITEschen resp. schiefHERMITEschen Sesquilinearformen auf V werden mit $\mathrm{Sesq}(V)$, $\mathrm{Sesq}_+(V)$ bzw. mit $\mathrm{Sesq}_-(V)$ bezeichnet.
3) Eine HERMITEsche Sesquilinearform Φ auf V heißt **positiv definit** oder ein HERMITE*sches inneres Produkt*, falls
$$\Phi(v, v) > 0 \text{ für alle } v \in V - \{0\}.$$
Ist in diesem Fall V endlich dimensional, heißt (V, Φ) ein **unitärer Vektorraum**.

Wie im Falle von Bilinearformen kann man wieder Matrizen zur Beschreibung heranziehen. Hier sind die entsprechenden Begriffsbildungen für Matrizen:

Definition 4.15. 1) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ definiert durch
$$A^* : \underline{n} \times \underline{m} \to \mathbb{C} : (k, j) \mapsto \overline{A_{jk}}$$
die (komplex) *adjungierte Matrix* von A.
2) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt (komplex) *selbstadjungiert* oder HERMITE*sch*, falls $A^* = A$. Sie heißt *schief*HERMITE*sch*, falls $A^* = -A$. Die Menge aller HERMITEschen $n \times n$-Matrizen wird mit $\mathbb{C}^{n\times n}_{Herm}$ bezeichnet, die Menge der schiefHERMITEschen mit $\mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh}$.

Übung: Zeige
$$\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{n\times m} : A \mapsto A^*$$

ist $\mathbb{R}$-linear, jedoch nicht $\mathbb{C}$-linear, genauer $\mathbb{C}$-semilinear.

Übung: Zeige

$$\mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} \to \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} : A \mapsto iA$$

ist ein Isomorphismus reeller Vektorräume. Zeige weiter:

$$\operatorname{Dim} \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} = \operatorname{Dim} \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} = n^2.$$

Übung: Für $A \in \mathbb{C}^{n\times m}, B \in \mathbb{C}^{m\times o}$ gilt

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

***Beispiel* 4.16.** 1) Sei $V := \mathbb{C}^{n\times 1}$. Dann heißt

$$\Phi : V \times V \to \mathbb{C} : (v, w) \mapsto v^*w (= \overline{v_1}w_1 + \cdots + \overline{v_n}w_n)$$

das StandardHERMITEsche innere Produkt auf V. Übung: Verifiziere dies. Wie wird man dies auf $\mathbb{C}^{m\times n}$ verallgemeinern?
2) Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist

$$\varphi_{\underline{A}} : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C} : (v, w) \mapsto v^*Aw$$

eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Sie ist genau dann HERMITEsch resp. schiefHERMITEsch, falls A die entsprechende Eigenschaft hat. Insbesondere nennen wir eine HERMITEsche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *positiv definit*, falls $\varphi_{\underline{A}}$ positiv definit ist. Beachte: Das StandardHERMITEsche innere Produkt auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$ ist gerade $\varphi_{\underline{I_n}}$.

Wenn man etwas Neues beginnt, sollte man sich den Bezug zum Bekannten überlegen.

Bemerkung 4.17. Ist V ein (endlich erzeugter) $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$, so kann man V durch Einschränkung der Skalare auch als reellen Vektorraum $V_{|\mathbb{R}}$ mit Basis $(b_1, ib_1, \dots, b_n, ib_n)$ auffassen, also die zugrundeliegende abelsche Gruppe bleibt, jedoch die Dimension verdoppelt sich, genauer die reelle Dimension ist das Doppelte der komplexen. Ist $\Phi \in \operatorname{Sesq}(V)$, so sind $\Re\circ\Phi, \Im\circ\Phi \in \operatorname{Bifo}(V_{\mathbb{R}})$ reelle Bilinearformen mit $\Phi = \Re\circ\Phi + i\Im\circ\Phi$. Genau dann ist Φ HERMITEsch, wenn $\Re \circ \Phi$ symmetrisch und $\Im \circ \Phi$ alternierend sind.

Wer will, kann die letzte Bemerkung noch genauer ausführen. Wir halten nur fest, daß man das Studium von Sesquilinearformen auch als Studium von gewissen Paaren von reellen Bilinearformen auffassen kann. Analog zum Fall der Bilinearformen haben wir:

Satz 4.18. *Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B \in V^n$.*
1)

$$\operatorname{Sesq}(V) \to \mathbb{C}^{n\times n} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$$

ist ein Isomorphismus komplexer Vektorräume, wobei ${}_B\Phi^B$ *die* GRAM-Matrix *von* Φ *bezüglich* B *ist, definiert durch*

$$ {}_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \to \mathbb{C} : (k, j) \mapsto \Phi(b_k, b_j). $$

Für alle $v, w \in V$ *gilt*

$$ \boxed{\Phi(v, w) = ({}^B v)^* {}_B\Phi^{BB} w.} $$

2) Der Isomorphismus aus 1) schränkt sich zu Isomorphismen der reellen Vektorräume

$$ \mathrm{Sesq}_+(V) \to \mathbb{C}^{n\times n}_{Herm} \text{ und } \mathrm{Sesq}_-(V) \to \mathbb{C}^{n\times n}_{schiefh} $$

ein. Weiter ist $\Phi \in \mathrm{Sesq}_+(V)$ *genau dann positiv definit, falls die* GRAM*matrix* ${}_B\Phi^B$ *positiv definit ist.*

Beweis. Übung q. e. d.

Korollar 4.19. *Sind* $B, C \in V^n$ *Basen von* V *und* $\Phi \in \mathrm{Sesq}(V)$, *so gilt*

$$ \boxed{{}_C\Phi^C = ({}^B \mathrm{Id}_V^C)^* {}_B\Phi^{BB} \mathrm{Id}_V^C}. $$

***Beispiel* 4.20.** Sei $\Phi \in \mathrm{Sesq}_+(V)$ gegeben durch

$$ {}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. $$

Mit Hilfe der Basistransformation

$$ T := {}^B \mathrm{Id}^C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix} $$

bekommen wir

$$ {}_C\Phi^C = T^* {}_B\Phi^B T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. $$

Die weitere Basistransformation

$$ S := {}^C \mathrm{Id}^D := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

bekommen wir

$$ {}_D\Phi^D = S^* {}_C\Phi^C S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, $$

so daß D bereits Orthogonalbasis ist.