Kapitel 1

EUKLIDische Vektorräume

1.1 Bilinearformen und Matrizen

Lernziele 1.
- *Bilinearformen*
- GRAM*matrix*

Wir definieren jetzt Bilinearformen auf Vektorräumen. Ein wichtiger Spezialfall, den wir auch zuerst behandeln werden, wird das innere Produkt eines reellen Vektorraumes sein. Dies wiederum gibt uns die Möglichkeit, die Länge eines Vektors in Verallgemeinerung der Situation unseres dreidimensionalen Anschauungsraumes zu definieren.

Definition 1.1. Sei V ein K-Vektorraum .
1) Eine Abbildung $\Phi : V \times V \to K : (v, w) \mapsto \Phi(v, w)$ heißt *Bilinearform* von V, falls Φ in jeder Komponente linear ist, d.h.

$$\Phi(av + bv', w) = a\Phi(v, w) + b\Phi(v', w) \text{ für alle } a, b \in K, v, v', w \in V$$

und

$$\Phi(v, aw + bw') = a\Phi(v, w) + b\Phi(v, w') \text{ für alle } a, b \in K, v, w, w' \in V$$

Die Menge aller Bilinearformen von V bezeichnen wir mit $\mathrm{Bifo}(V)$.
2) Eine Bilinearform $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ heißt *symmetrisch* bzw. *schiefsymmetrisch*, falls $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ bzw. $\Phi(v, w) = -\Phi(w, v)$ für alle $v, w \in V$. Die Menge der symmetrischen Bilinearformen von V bezeichnen wir mit $\mathrm{Bifo}_+(V)$ und die Menge der schiefsymmetrischen mit $\mathrm{Bifo}_-(V)$. Ferner heißt $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ *alternierend*, falls $\Phi(v, v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt. Die Menge der alternierenden Bilinearformen wird mit $\mathrm{Bifo}_A(V)$ bezeichnet.

Wir führen nun sofort den wichtigen Spezialfall für $K = \mathbb{R}$ des inneren Produktes ein.

Definition 1.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
1) Eine symmetrische Bilinearform $\Phi \in \text{Bifo}(V)$ heißt *inneres Produkt* oder eine *positiv definite Bilinearform* oder ein *positiv definites Skalarprodukt* auf V, falls $\Phi(v, v) > 0$ für alle $v \in V - \{0\}$.
Die Abbildung $V \to \mathbb{R} : v \mapsto \Phi(v, v)$ heißt auch die von Φ induzierte *quadratische Form*.
(V, Φ) heißt ein EUKLID*ischer Vektorraum* oder ein *endlich dimensionaler reeller* HILBERT*raum*.
2) $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{tr} = A\}$ bezeichnet die Menge der *symmetrischen* Matrizen über $\mathbb{R}$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ heißt *positiv definite* Matrix , falls

$$v^{tr}Av > 0 \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^{n\times 1} - \{0\}.$$

Als Mengen sind $V \times V$ und $V \oplus V$ gleich. Wir verwenden hier die Bezeichnung $V \times V$ für den Definitionsbereich von Bilinearformen, da Bilinearformen nichts mit der Vektorraumstruktur von $V \oplus V$ zu tun haben, sondern nur mit der Vektorraumstruktur der beiden Komponenten, also von V.

Bemerkung 1.3.

1. $\text{Bifo}(V) \leq K^{V\times V}$.
2. $\text{Bifo}_+(V), \text{Bifo}_-(V), \text{Bifo}_A(V) \leq \text{Bifo}(V)$.
3. $\text{Bifo}_A(V) \leq \text{Bifo}_-(V)$.
4. Falls $2 \neq 0$ in K, gilt $\text{Bifo}_A(V) = \text{Bifo}_-(V)$.
5. Falls $2 \neq 0$ in K, gilt $\text{Bifo}(V) = \text{Bifo}_+(V) \oplus \text{Bifo}_-(V)$.
6. Falls $2 = 0$ in K, gilt $\text{Bifo}_+(V) = \text{Bifo}_-(V)$.

Beweis. 1),2): Übung.
3) Aus $\Phi \in \text{Bifo}_A(V)$ folgt, dass $0 = \Phi(v + w, v + w) = 0 + 0 + \Phi(v, w) + \Phi(w, v)$ für alle $v, w \in V$, also $\Phi \in \text{Bifo}_-(V)$.
4) Aus $\Phi \in \text{Bifo}_-(V)$ folgt, dass $\Phi(v, v) = -\Phi(v, v)$, also $2\Phi(v, v) = 0$ für alle $v \in V$.
5) Offenbar ist mit Ψ auch $\Psi^{\leftrightarrow}$ definiert durch $\Psi^{\leftrightarrow}(v, w) = \Psi(w, v)$ für alle $v, w \in V$ in $\text{Bifo}(V)$. Die Abbildung $\tau : \text{Bifo}(V) \to \text{Bifo}(V) : \Psi \mapsto \Psi^{\leftrightarrow}$ ist ein Isomorphismus und $(\frac{1}{2}(\text{Id}_{\text{Bifo}(V)} + \tau), \frac{1}{2}(\text{Id}_{\text{Bifo}(V)} - \tau))$ ist eine Zerlegung der Identität von $\text{Bifo}(V)$, welche die direkte Summenzerlegung von $\text{Bifo}(V)$ produziert.
6) Falls $2 = 0$ in K, so ist $-1 = 1$ in K. Damit ist die Aussage klar. q. e. d.

***Beispiel* 1.4.**

1. Sei $V = K$ und $\Psi : V \times V \to K : (a, b) \mapsto ab$ das Produkt. Dann ist Ψ eine symmetrische Bilinearform und alle anderen Bilinearformen auf diesem Vektorraum sind Vielfache von Ψ.

2. Sei K beliebiger Körper und $V = K^n$. Dann ist das *Standardskalarprodukt*
$$\cdot : K^n \times K^n \to K : (v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}) \mapsto v \cdot w := a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$$
wiederum eine symmetrische Bilinearform. Es wird z.B. für $K = \mathbb{F}_2$ in der Codierungstheorie benutzt, hat dort allerdings nicht ganz so gute Eigenschaften wie im reellen Fall. Z.B. $(1, 1, 0, \ldots, 0) \cdot (1, 1, 0, \ldots, 0) = 0$, ohne daß der Vektor Null wäre.

3. Für $V = \mathbb{R}^n$ ist das Standardskalarprodukt ein inneres Produkt von $\mathbb{R}^n$ und $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ ist ein EUKLIDischer Raum.

4. Sei K beliebig. Dann ist das *Standardskalarprodukt* auf $V := K^{m\times n}$ definiert durch
$$K^{m\times n} \times K^{m\times n} \to K : (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB^{tr})$$
eine symmetrische Bilinearform auf $K^{m\times n}$. (Beachte $\mathrm{Spur}(AA^{tr}) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.)

5. Entsprechend ist für $V = \mathbb{R}^{m\times n}$
$$\Phi : V \times V \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB^{tr})$$
ein inneres Produkt und $(\mathbb{R}^{m\times n}, \Phi)$ ein EUKLIDischer Raum.

6. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum stetiger (und damit integrierbarer) Funktionen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist die Abbildung
$$V \times V \to \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$$
ein inneres Produkt auf V.

7. Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Hom}(V, K)$ für einen beliebigen K-Vektorraum V. Dann ist
$$\delta_1 \otimes \delta_2 : V \times V \to K : (v, w) \mapsto \delta_1(v)\delta_2(w)$$
eine Bilinearform, die genau dann symmetrisch ist, wenn (δ_1, δ_2) linear abhängig ist. $\delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1$ ist schiefsymmetrisch, sogar alternierend.

8. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B \in V^n$. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ ist
$$\Phi : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto ({}^B v)^{tr} \cdot A \cdot {}^B w$$
eine symmetrische Bilinearform, die genau dann ein inneres Produkt ist, wenn A positiv definit ist. Für $a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnet $a =: \Re(a + ib)$ den sogenannten *Realteil* der komplexen Zahl $a + ib$ und $a - ib =: \overline{a + ib}$ die konjugiert komplexe Zahl. Betrachte $V = \mathbb{C}$ als reellen Vektorraum. Dann ist
$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} : (a + ib, c + id) \mapsto \Re((a + ib)\overline{(c + id)})$$
ein inneres Produkt (Standardskalarprodukt). (Beweis: Übung.)

Wie Endomorphismen, wollen wir auch Bilinearformen durch Matrizen beschreiben.

Definition 1.5. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V^n$. Für $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ heißt

$$_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \to K : (i,j) \mapsto \Phi(b_i, b_j)$$

die GRAM*matrix* von Φ bezüglich B.

Erinnerung: Wir hatten für $A \in K^{m\times n}$ mit $A_{i,-}$ die i-te Zeile von A bezeichnet und mit mit $A_{-,j}$ die j-te Spalte.

Satz 1.6. *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B \in V^n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Bifo}(V) \to K^{n\times n} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$$

ist ein Isomorphismus. Weiter gilt für alle $v, w \in V$:

$$\boxed{\Phi(v,w) = v_B \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw}$$

wobei $v_B := ({}^Bv)^{tr}$.

Beachte der obige Isomorphismus ist invers zu $K^{n\times n} \to \mathrm{Bifo}(K^{n\times 1}) : A \mapsto \varphi_A$, wenn man für $V := K^{n\times 1}$ die Standardbasis als B zugrundelegt.

Beweis. Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $v = \sum a_i b_i$, $w = \sum c_j b_j$. Dann gilt

$$\Phi(v,w) = \Phi(\sum a_i b_i, w) = \sum a_i \Phi(b_i, w) = v_B \cdot \begin{pmatrix} \Phi(b_1, w) \\ \vdots \\ \Phi(b_n, w) \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist

$$\Phi(b_i, w) = \sum_j \Phi(b_i, b_j) c_j = ({}_B\Phi^B)_{i,-} \cdot {}^Bw$$

also

$$\begin{pmatrix} \Phi(b_1, w) \\ \vdots \\ \Phi(b_n, w) \end{pmatrix} = {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw,$$

insgesamt also

$$\Phi(v,w) = v_B \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^Bw.$$

Wegen dieser Formel ist die Abbildung $\Phi \mapsto {}_B\Phi^B$ injektiv. Daß sie linear ist, folgt direkt aus der Definition der Linearkombinationen von Abbildungen:

$$(a\Phi + b\Psi)(b_i, b_j) = a\Phi(b_i, b_j) + b\Psi(b_i, b_j),$$

d.h.

$$_B(a\Phi + b\Psi)^B = a_B\Phi^B + b_B\Psi^B$$

für alle $a, b \in K, \Phi, \Psi \in \mathrm{Bifo}(V)$. Daß die Abbildung surjektiv ist, folgt aus der leicht verifizierten Tatsache, daß für jedes $A \in K^{n\times n}$ die Abbildung

$$V \times V \to K : (v, w) \mapsto v_B \cdot A \cdot {}^B w$$

bilinear ist. q. e. d.

Definition 1.7. Wir definieren die Menge

$$K^{n\times n}_{sym} := \{A \in K^{n\times n} \mid A^{tr} = A\}$$

der *symmetrischen Matrizen* und

$$K^{n\times n}_{schief} := \{A \in K^{n\times n} \mid A^{tr} = -A\},$$

die Menge der *schiefsymmetrischen* Matrizen. Falls $2 = 0$ in K, so sei

$$K^{n\times n}_{schief,0} := \{A \in K^{n\times n} \mid A^{tr} = -A, a_{ii} = 0 \text{ für alle } i\}.$$

Korollar 1.8. *1) Die Abbildung* $\mathrm{Bifo}_+(V) \to K^{n\times n}_{sym} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$ *ist ein Isomorphismus. Insbesondere* $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bifo}_+(V)) = (n + 1)n/2$.
2) Die Abbildung $\mathrm{Bifo}_-(V) \to K^{n\times n}_{schief} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$ *ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt*

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Bifo}_-(V)) = \begin{cases} (n-1)n/2 & \text{falls } 2 \neq 0 \text{ in } K \\ (n+1)n/2 & \text{falls } 2 = 0 \text{ in } K \end{cases}$$

3) Falls $2 = 0$ in K, ist $\mathrm{Bifo}_A(V) \to K^{n\times n}_{schief,0} : \Phi \mapsto {}_B\Phi^B$ *ein Isomorphismus. Insbesondere ist* $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bifo}_A(V)) = n(n-1)/2$.

Beweis. 1) und 2): Klar.
3) Nur die Surjektivität der Abbildung ist nicht ganz klar: Sei also $A \in K^{n\times n}_{schief,0}$. Zeige: $v^{tr}Av = 0$ für alle $v \in K^{n\times 1}$. Aber

$$v^{tr}Av = \sum_{i,j=1}^{n} v_i a_{ij} v_j = 2 \sum_{i<j} v_i a_{ij} v_j = 0.$$

q. e. d.

Dies liefert uns eine Identität, die beschreibt, wie wir die Grammatrix einer Bilinearform bezüglich einer anderen Basis erhalten.

Korollar 1.9. *Sind $B, C \in V^n$ Basen von V und $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$, so gilt*

$$\boxed{{}_C\Phi^C = ({}^B\,\mathrm{Id}_V^C)^{tr}\,{}_B\Phi^{B\,B}\,\mathrm{Id}_V^C}.$$

Definition 1.10. Sei $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$.

1. Ein Paar $(v, w) \in V^2$ von Vektoren heißt *orthogonal* bezüglich Φ, falls $\Phi(v, w) = 0$.
2. Eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V^n$ heißt *Orthogonalbasis*, falls $\Phi(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$, d.h. die Grammatrix ${}_B\Phi^B$ ist eine Diagonalmatrix.

Falls $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, so ist "orthogonal sein" eine symmetrische Relation.

Wir werden nun den Spezialfall der Euklidischen Vektorrüme näher untersuchen und sehen, dass wir eine Orthogonalbasis hier sehr leicht berechnen können.

1.2 Euklidische Vektorräume

Lernziele 2.

- GRAM-SCHMIDT*sches Orthogonalisierungsverfahren,*
- CHOLESKY*zerlegung,* CAUCHY-SCHWARZ*sche Ungleichung,*
- *Winkel und Längen, Dreiecksungleichung,*
- *Orthogonalprojektion und beste Approximation.*

Euklidische Vektorräume sind die Grundlage für große Teile der Geometrie einerseits und andererseits wichtig im Hinblick auf Funktionenräume für die Funktionalanalysis und Numerik.

Wir haben bereits in Korollar 1.9 gesehen, daß GRAMmatrizen ein anderes Transformationsverhalten haben, als Matrizen für Endomorphismen bei Basistransformationen. Es ist entsprechend leichter Normalformen herzustellen. Wir werden zeigen, daß jeder EUKLIDische Vektorraum eine Basis zuläßt, bezüglich der die GRAMmatrix die Einheitsmatrix ist.

Definition 1.11. Sei (V, Φ) EUKLIDischer Vektorraum.
Eine Basis $B \in V^n$ heißt *Orthonormalbasis* (meistens als ONBasis abgekürzt), falls für $i, j \in \underline{n}$ gilt $\Phi(b_i, b_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, d.h. ${}_B\Phi^B = I_n$.

Was ist der Vorteil einer Orthonormalbasis gegenüber einer beliebigen Basis? Man kann die Koeffizienten in der Basisdarstellung eines Vektors sehr einfach berechnen:

Satz 1.12. *Sei $B \in V^n$ eine Orthonormalbasis des* EUKLID*ischen Vektorraumes (V, Φ), so gilt für jedes $v \in V$*

$$\boxed{v = \Phi(b_1, v)b_1 + \cdots + \Phi(b_n, v)b_n}$$

in anderen Worten

$${}^B v = \begin{pmatrix} \Phi(b_1, v) \\ \vdots \\ \Phi(b_n, v) \end{pmatrix}.$$

$\Phi(b_i, v)$ heißt auch der i-te FOURIERkoeffizient *von v bezüglich der ONBasis B.*

Beweis. Sei $v = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. Dann nehmen wir das innere Produkt mit b_i und erhalten wegen $\Phi(b_i, b_j) = \delta_{ij}$

$$\Phi(b_i, v) = a_i.$$

q. e. d.

Aus einer Orthogonalbasis erhalten wir leicht eine Orthonormalbasis: Ist $B \in V^n$ eine

Orthogonalbasis, so ist $B' \in V^n$ definiert durch $b'_i := \Phi(b_i, b_i)^{-1/2} b_i$ eine Orthonormalbasis. Beachte, $\Phi(b_i, b_i) > 0$.

Satz 1.13. *(*GRAM-SCHMIDT*sches Orthogonalisierungsverfahren) Ist (V, Φ) ein* EUKLI-DI*scher Vektorraum mit Basis $B \in V^n$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis B' von V mit der Eigenschaft*

$$\langle b'_1, \dots, b'_i \rangle = \langle b_1, \dots, b_i \rangle \text{ für alle } i \in \underline{n}.$$

Beweis. Wegen der Vorbemerkung genügt es eine Orthogonalbasis zu konstruieren. (Dies hat bei konkreten Rechnungen den Vorteil, daß man Quadratwurzeln vermeidet.) Also B' soll nur Orthogonalbasis sein. Wir setzen $b'_1 := b_1$. Angenommen wir haben $b'_1, \dots, b'_{k-1}$ bereits konstruiert. Dann setzen wir für b'_k an:

$$b'_k = a_1 b'_1 + \ldots + a_{k-1} b'_{k-1} + b_k$$

Mit diesem Ansatz ist die Bedingung

$$\langle b'_1, \dots, b'_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$$

automatisch erfüllt. Da wir bereits mit den b'_i gearbeitet haben, sind die Koeffizienten a_i jetzt leicht zu bestimmen, denn für $i < k$ bedeutet b'_i orthogonal zu b'_k einfach nur

$$0 = 0 + \ldots + 0 + a_i \Phi(b'_i, b'_i) + 0 + \ldots + 0 + \Phi(b'_i, b_k).$$

Wegen $\Phi(b'_i, b'_i) > 0$ können wir nach a_i auflösen. q. e. d.

***Beispiel* 1.14.** Wir nehmen $V := \mathbb{R}[x]_{Grad<3}$ und als Skalarprodukt

$$\Phi : V \times V \to \mathbb{R} : (p, q) \mapsto \int_{-1}^{1} p(a)q(a)da$$

liefert für die Ausgangsbasis $B = (1, X, X^2)$ die Orthogonalbasis $(1, X, X^2 - 1/3)$. (Übung: Normiere, um eine ON-Basis zu bekommen. Betrachte Grad 4.)

Korollar 1.15. *(*CHOLESKY*zerlegung) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ positiv definit. Dann gibt es eine obere Dreiecksmatrix $D = (d_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. $d_{ij} = 0$ für $i > j$ (Nullen unterhalb der Diagonale), mit $A = D^{tr} D$.*

Beweis. Der Beweis verwendet die GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierung. Wir fassen A auf als GRAMmatrix ${}_B\Phi^B$ eines inneren Produktes Φ auf einem Vektorraum V, vgl. Beispiel 2.5(7). Mit Hilfe von Satz 1.13 haben wir

$$I_n = {}_{B'}\Phi^{B'} = ({}^BId_V^{B'})^{tr}\, \underbrace{{}_B\Phi^B}_{A}\, {}^BId_V^{B'}$$

also

$$({}^BId_V^{B'})^{-tr} \cdot ({}^BId_V^{B'})^{-1} = A = {}_B\Phi^B.$$

q. e. d.

Aus dem GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren bekommen wir eine wichtige Ungleichung als Konsequenz, die es erlaubt Winkel und Längen einzuführen.

Satz 1.16. *(CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung) Sei (V, Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum und $v, w \in V$. Dann gilt*

$$\Phi(v, v)\Phi(w, w) - \Phi(v, w)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn (v, w) linear abhängig.

Beweis. Der linear abhängige Fall ist klar, da v und w beides Vielfache eines geeigneten Vektors sind.
Im Falle linear unabhängiger Vektoren liefert GRAM-SCHMIDT eine ONBasis (b_1, b_2) von $\langle v, w\rangle$ mit $v = ab_1, w = c_1b_1 + c_2b_2$. für geeignete $a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a, c_2 \neq 0$. Wir haben dann

$$\Phi(v, v)\Phi(w, w) - \Phi(v, w)^2 = a^2(c_1^2 + c_2^2) - (ac_1)^2 = a^2c_2^2 > 0.$$

q. e. d.

Definition 1.17. Sei (V, Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum.
1) Für $v \in V$ heißt $|v| := \sqrt{\Phi(v, v)}$ die *Länge* von v.
2) Für $(v, w) \in V^2$ mit $v \neq 0, w \neq 0$ ist der *Winkel* $\angle(v, w)$ mit $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi$ definiert durch

$$\boxed{\cos(\angle(v, w)) = \frac{\Phi(v, w)}{|v| \cdot |w|}}.$$

Wegen der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung und den Eigenschaften des Cosinus (stetig, streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ mit Maximum 1 und Minimum -1) ist der Winkel wohldefiniert. Er ist genau dann $\pi/2$, wenn v und w orthogonal zueinander sind. Um uns davon zu überzeugen, daß der Längenbegriff sinnvoll ist, beweisen wir die *Dreiecksungleichung*.

Satz 1.18. *(Dreiecksungleichung) Sei* (V,Φ) *ein* EUKLID*ischer Vektorraum und* $v,w \in V$. *Dann gilt:*

$$\boxed{|v+w| \leq |v| + |w|}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{array}{rcc} (|v+w|)^2 & = & \Phi(v+w, v+w) \\ & = & |v|^2 + |w|^2 + 2\Phi(v,w) \\ & \leq & |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| \\ & = & (|v|+|w|)^2 \end{array},$$

so daß die Behauptung aus der Monotonie der Quadratwurzelfunktion folgt. q. e. d.

Übung: Beweise den Satz des PYTHAGORAS: Sind $v,w \in V - \{0\}$ orthogonal, so gilt $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2$.

Übung: Wann genau gilt Gleichheit in der Dreiecksungleichung?

Jetzt müssen wir über Teilräume sprechen. Im Unterschied zu beliebigen Vektorräumen hat man bei EUKLIDischen Vektorräumen mit jedem Teilraum noch einen kanonischen weiteren Teilraum, so daß der ganze Raum direkte Summe der beiden Teilräume ist. Diese Zerlegung ist grundlegend für viele Anwendungen.

Definition 1.19. Sei (V,Φ) ein EUKLIDischer Vektorraum. Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^\perp := \{v \in V \mid \Phi(w,v) = 0 \text{ für alle } w \in M\}$$

der *Orthogonalraum* von M bezüglich Φ.

Satz 1.20. *Sei* (V,Φ) *ein* EUKLID*ischer Vektorraum mit* $\mathrm{Dim}(V) = n$ *und* $U \leq V$. *Dann gilt*

$$V = U \oplus U^\perp,$$

insbesondere

$$\mathrm{Dim}(U) + \mathrm{Dim}(U^\perp) = \mathrm{Dim}(V).$$

Die Projektionen π_U *und* $\pi_{U^\perp}$ *in dieser Zerlegung von* V *in Orthogonalräume werden* Orthogonalprojektion *auf* U *bzw.* $U^\perp$ *genannt. Ist weiter* $v \in V$, *so gilt*

$$|\pi_{U^\perp}(v)| = min\{|v-u| \mid u \in U\}$$

und das Minimum, genannt der Abstand *von* v *und* U, *wird durch genau einen Vektor von* U *angenommen, nämlich* $\pi_U(v)$, *auch* beste Approximation *von* v *an* U *genannt.*