# Kapitel 6

# Gruppen

**Lernziele 11.**

- *Stabilisatoren,*
- *Bahnen von Stabilisatoren,*
- *Rückblick auf verschiedene Konstruktionen vom Gesichtspunkt der Gruppentheorie,*

## 6.1 Untergruppen und Stabilisatoren

Bislang haben wir das Konzept des Operierens einer Gruppe auf einer Menge kennengelernt. Inzwischen haben wir eine Reihe Beispiele hierfür. Wir wollen ein weiteres Konzept kennenlernen, welches dual zum Konzept der Bahn ist.

**Definition 6.1.** Sei $G$ eine Gruppe.
1) $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von $G$, kurz $U \leq G$, falls

(a) $U \neq \emptyset$,

(b) $g, h \in U$ impliziert $gh^{-1} \in U$.

2) $G$ operiere auf der Menge $M$. Für $m \in M$ heißt

$$\mathrm{Stab}_G(m) := \{g \in G | gm = m\}$$

der *Stabilisator* von $m$ in $G$.

**Bemerkung 6.2.** $G$ operiere auf $M$.
1) Für $m \in M$ gilt $\mathrm{Stab}_G(m) \leq G$.
2) Ist $m \in M$ und $g \in G$, so gilt $\mathrm{Stab}_G(gm) = g\,\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1}$.

Beweis. 1.) (leichte aber wichtige) Übung. 2.) Es gilt $h \in \mathrm{Stab}_G(gm)$ genau dann, wenn $h(gm) = gm$, also $g^{-1}hgm = m$, d. h. $g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_G(m)$ oder $h \in g\,\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1}$. q. e. d.

Übung: Sei $G$ eine Gruppe, $U \leq G, g \in G$. Zeige: $gUg^{-1} \leq G$. Man nennt $U$ und $gUg^{-1}$ *konjugierte Untergruppen*. Man zeige weiter: Ist $\mathcal{U}(G)$ die Menge der Untergruppen von $G$, so ist

$$G \times \mathcal{U}(G) \to \mathcal{U}(G) : (g, U) \mapsto gUg^{-1}$$

eine Operation von $G$. Die Bahnen dieser Operation heißen auch *Konjuigiertenklassen* von Untergruppen von $G$.

Bemerkung 6.2 sagt also: Die Stabilisatoren von Elementen derselben Bahn sind konjugiert, genauer, sie bilden eine Konjugiertenklasse von Untergruppen.

**Definition 6.3.** Die Gruppe $G$ operiere auf der Menge $M$.
1.) Die Operation heißt *transitiv*, falls $M$ eine Bahn bildet, d. h. $M = Gm$ für ein $m \in M$ ( und damit $M = Gm$ für jedes $m \in M$).
2.) Die Operation von $G$ auf $M$ heißt *regulär*, falls sie transitiv ist und $\mathrm{Stab}_G(m) = \{1\}$ für alle $m \in M$.
3.) Die Operation von $G$ auf $M$ heißt *treu*, falls $gm = m$ für alle $m \in M$ impliziert $g = 1$.

Übung: Sei $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeige: $\mathrm{GL}(V)$ operiert transitiv auf der Menge der symmetrischen positiv definiten Bilinearformen auf $V$.

**Satz 6.4.** *Die Gruppe $G$ operiere auf der Menge $M$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
*1.) $G$ operiert regulär auf $M$.*
*2.) Zu je zwei $m, n \in M$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $gm = n$. (Man ist versucht dieses $g \in G$ mit $\overrightarrow{mn}$ zu bezeichnen.)*
*3.) Für jedes feste $m_0 \in M$ ist die Abbildung*

$$G \to M : g \mapsto gm_0$$

*bijektiv.*
*4.) Es existiert ein $m_0 \in M$, so daß die Abbildung*

$$G \to M : g \mapsto gm_0$$

*bijektiv ist.*

Beweis. 1.) $\Longrightarrow$ 2.) Wegen der Transitivität existiert ein $g \in G$ mit $gm = n$. Angenommen es gibt ein weiteres $h \in G$ mit $hm = n$. Dann ist $h^{-1}g \in Stab_G(m) = \{1_G\}$, also $h = g$.
2.) $\Longrightarrow$ 3.) Definiert ist die Abbildung immer. Sie ist surjektiv, da $G$ transitiv operiert.

Sie ist injektiv wegen der Eindeutigkeit in 2.).
3.) $\Longrightarrow$ 4.) Klar.
4.) $\Longrightarrow$ 1.) $\mathrm{Stab}_G(m_0) = \{1_G\}$ wegen der Injektivität in 4.). Wegen der Surjektivität in 4.) ist die Operation auch transitiv. Ist $m \in M$ beliebig, so haben wir ein $g \in G$ mit $gm_0 = m$. Also $\mathrm{Stab}_G(m) = \mathrm{Stab}_G(gm_0) = g\,\mathrm{Stab}_G(m_0)g^{-1} = \{1_G\}$ q. e. d.

***Beispiel* 6.5.** 1.) Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum und $\mathcal{B}(V) \subset V^n$ die Menge der Basen von $V$. Dann sind die beiden Operationen

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V) : (g, B) \mapsto gB := (g(B_1), \dots, g(B_n))$$

und

$$\mathrm{GL}(n, K) \times \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(V) : (g, B) \mapsto Bg^{-1}$$

reguläre Operationen.
2.) Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von $K$-Vektorräumen und $W \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, so operiert $\mathrm{Kern}(\varphi)$ regulär auf der Faser $\varphi^{-1}(\{W\})$. Dies wird der Ausgangspunkt für die affine Geometrie sein.
3.) Ist $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraumund $\mathcal{TR}_1(V)$ die Menge der eindimensionalen Teilräume von $V$, so operiert $\mathrm{GL}(V)$ transitiv, aber nicht regulär auf $\mathcal{TR}_1(V)$. Dies wird der Ausganspunkt für die projektive Geometrie sein.
4.) Sei $V$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathrm{GL}(V)$ operiert transitiv auf der Menge der positiv definiten Bilinearformen auf $V$, jedoch nicht regulär.
5.) Die Operation einer abelschen Gruppe ist genau dann treu und transitiv, falls sie regulär ist. (Beweis: Übung). Dies gilt nicht für nicht abelsche Gruppen: Die Operation von $\mathrm{GL}(V)$ auf $V - \{0\}$ ist treu und transitiv, jedoch nicht regulär, falls $\mathrm{Dim}(V) > 1$. (Vgl. 1.), um zu einer regulären Operation zu kommen.)
6.) Sei $G$ eine Gruppe. Dann operiert $G$ regulär auf sich selbst durch Linksmultiplikation, also $M := G$ und $G \times M \to M : (g, h) \mapsto gh$ ist eine reguläre Operation.

Für unsere geometrischen Anwendungen der Gruppentheorie ist die folgende Bemerkung grundlegend.

**Bemerkung 6.6.** Die Gruppe $G$ operiere auf den Menge $M$ und $N$.
1) $G$ operiert auf $M \times N$ durch

$$G \times (M \times N) \to M \times N : (g, (m, n)) \mapsto (gm, gn).$$

Diese Operation heißt *diagonale Operation*.
2.) Ist die Operation von $G$ auf $M$ transitiv, dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Bahnen von $G$ auf $M \times N$ und der Menge der $\mathrm{Stab}_G(m)$-Bahnen auf $N$ für jedes (feste) $m \in M$:

$$(M \times N)/G := (M \times N)/\sim_G \to N/\,\mathrm{Stab}_G(m) : G(m, n) \mapsto \mathrm{Stab}_G(m)n.$$

$$\boxed{(M \times N)/G \xrightarrow{\sim} N/\operatorname{Stab}_G(m)}$$

Beweis. 1.) Übung. 2.) Wir zeigen, daß diese Abbildung wohldefiniert ist:
Wegen der Transitivität von $G$ auf $M$ ist jede Bahn von $G$ auf $M \times N$ von der Form $G(m,n) = \{(gm, gn) | g \in G\}$. Gilt $G(m,n) = G(m,n')$ für ein $n' \in N$, so sind offenbar $n$ und $n'$ in derselben Bahn unter $\operatorname{Stab}_G(m)$. Also ist die Abbildung wohldefiniert.
Offenbar ist die Abbildung surjektiv. Wir zeigen die Injektivität:
$\operatorname{Stab}_G(m)n = \operatorname{Stab}_G(m)n'$ impliziert offenbar $G(m,n) = G(m,n')$. Also haben wir insgesamt eine Bijektion. q. e. d.

## 6.2 Beispiele: Operationen, Stabilisatoren, Invarianten

Dieser Abschnitt soll nochmals Wiederholung vieler Begriffsbildungen aus dem letzten Semester sein, wobei wir verstehen wollen, daß der gruppentheoretische Gesichtspunkt sich sehr natürlich ergibt. Er wird uns in Zukunft als Leitstern dienen.

***Beispiel* 6.7.** Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(V)$ auf $V - \{0\}$ transitiv. Der Stabilisator eines $v \in V - \{0\}$ hat dann jedes Vielfache $\neq 0$ von $v$ als Bahn, sowie die Menge aller Vektoren, die linear unabhängig von $V$ sind. Dies vergleiche man mit der früheren Beschreibung der Bahnen von $\mathrm{GL}(V)$ auf $V \times V$ durch die Teilräume von $K^2$, die die linearen Abhängigkeiten beschreiben (Stichwort: Trennende Invariante).
In Matrizen: $V = K^{n\times 1}$, $G = \mathrm{GL}(n, K)$, Operation durch Linksmultiplikation. Der Stabilisator des ersten Standardbasisvektors $E_1 := (I_n)_{-,1}$ ist

$$\operatorname{Stab}_G(E_1) := \{\left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ \hline 0 & A \end{array}\right) | a \in K^{1\times(n-1)}, A \in \mathrm{GL}(n-1, K)\}$$

und hat die folgenden Bahnen auf $V$:

$$\{aE_1\} \text{ mit } a \in K \text{ und } V - \{aE_1 | a \in K\}.$$

Es stellt sich die Frage, warum man in diesem Beispiel alles durch Matrizen beschreiben kann. Die Anwort ist sehr einfach:

**Definition 6.8.** Sei $G$ eine Gruppe.
1) Die Operation von $G$ auf dem $K$-Vektorraum $V$ heißt **linear**, falls für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$\hat{g} : V \to V : v \mapsto gv$$

linear ist.
2) Die Gruppe $G$ operiere auf der Menge $M$ und die Gruppe $H$ auf der Menge $N$. Die

beiden Operationen heißen **ähnlich**, falls ein Isomorphismus $\rho : G \to H$ und eine Bijektion $\alpha : M \to N$ existieren, so daß

$$\alpha(gm) = (\rho(g))(\alpha(m)) \text{ für alle } g \in G, m \in M$$

gilt, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\hat{g}}{\to} & M \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\alpha \\ N & \underset{\widehat{\rho(g)}}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

für jedes $g \in G$ kommutativ ist. Sind zudem die beiden Operationen linear (über demselben Körper), so heißen sie als lineare Operationen **ähnlich**, falls $\alpha$ noch zusätzlich ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Übung: Operiert die Gruppe $G$ regulär auf $M$, so ist diese Operation ähnlich zu der von $G$ auf sich selbst durch Linksmultiplikation. Also $\rho := \mathrm{Id}_G$ ist der Isomorphismus und $G \to M : g \mapsto gm_0$ ist die Ähnlichkeit, wobei $m_0 \in M$ beliebig, aber fest gewählt ist.

***Beispiel* 6.9.** Operiert die Gruppe $G$ linear und treu auf dem Vektorraum $V$, für den wir die Basis $B \in V^n$ zugrunde legen, so ist die Operation ähnlich zu der der Matrixgruppe

$$G_B := \{{}^B\hat{g}^B | g \in G\}$$

auf $K^{n\times 1}$. Unser Isomorphimus ist gegeben durch

$$\rho : G \mapsto G_B : g \mapsto {}^B\hat{g}^B$$

und die Ähnlichkeitsabbildung gegeben durch

$$\alpha : V \to K^{n\times 1} : v \mapsto {}^B v.$$

Man beachte, $\rho$ ist genau deshalb bijektiv, weil die Operation von $G$ auf $V$ treu ist.

***Beispiel* 6.10.** Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(V)$ auf dem Dualraum $V^*$ linear und treu durch

$$G \times V^* \to V^* : (g, \varphi) \mapsto (g^{-1})^{tr}(\varphi) = \varphi \circ g^{-1}.$$

Der Stabilisator eines $\varphi \in V^* - \{0\}$ operiert auf jeder Faser $\varphi^{-1}(\{a\})$ mit $a \in K$, also auf jeder Restklasse nach $\mathrm{Kern}(\varphi)$. Das Studium der Operation von $\mathrm{Stab}_G(\varphi)$ auf $\varphi^{-1}(\{1\})$ heißt affine Geometrie und wird uns noch ausführlich beschäftigen. Im Lichte von Bemerkung 6.6 würden wir die Operation von $G$ auf $V^* \times V$ betrachten, oder besser die

Einschränkung auf $(V^* - \{0\}) \times (V - \{0\})$, so daß sich die Operation von $\mathrm{Stab}_G(\varphi)$ auf $V - \{0\}$ und damit auf $\varphi^{-1}(\{1\})$ anbietet. Beachte:

$$(V^* - \{0\}) \times (V - \{0\}) \to K : (\varphi, v) \mapsto \varphi(v)$$

ist eine trennende Invariante dieser Operation. (Beweis: Übung. Hinweis: Die folgende Matrixbetrachtung hilft hierbei.)
In Matrizen: $V = K^{n\times 1}$, $G = \mathrm{GL}(n, K)$, die Operation auf $K^{1\times n}$, dem bekanntlich $V^*$ entspricht, ist gegeben durch

$$G \times K^{1\times n} \to K^{1\times n} : (g, Z) \mapsto Zg^{-1}.$$

Der Stabilisator des letzten Standardbasisvektors $Z_n := (I_n)_{n,-}$ ist

$$\mathrm{Stab}_G(Z_n) := \{\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) | a \in K^{(n-1)\times 1}, A \in \mathrm{GL}(n-1, K)\}.$$

Die Operation dieser Gruppe auf

$$\{\left(\begin{array}{c} S \\ \hline 1 \end{array}\right) | S \in K^{(n-1)\times 1}\}$$

wird also affine Geometrie sein. Man beachte:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} S \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} AS + a \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

Es folgen noch zwei weitere Beispiele linearer Operationen, die uns intensiv beschäftigt haben. Dabei stellt sich im Sinne von Bemerkung 6.6 heraus, daß es von Interesse ist, den Stabilisator auf einer anderen Menge operieren zu lassen.

***Beispiel* 6.11.** Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum. Dann operiert $G := \mathrm{GL}(V)$ linear, jedoch nicht treu auf $\mathrm{Bifo}_+(V)$ durch

$$G \times \mathrm{Bifo}_+(V) : (g, \Phi) \mapsto g\Phi$$

mit

$$(g\Phi)(v, w) = \Phi(g^{-1}(v), g^{-1}(w)).$$

Der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(\Phi)$ wird mit $\mathrm{O}(V, \Phi)$ bezeichnet und heißt *orthogonale Gruppe* von $(V, \Phi)$. Die Operation der orthogonalen Gruppe auf $V$ ist wieder von erheblichem Interesse; wir haben lediglich den Fall $K = \mathbb{R}$ und $\Phi$ positiv definit im letzten Semester im Rahmen der EUKLIDischen Vektorraumtheorie durchgeführt. Der SYLVESTERsche Trägheitssatz beschreibt uns die Bahnen der obigen Operation durch die Signatur als trennende Invariante im reellen Fall. Signatur $(1, n-1, 0)$ ist in der Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung: $(V, \Phi)$ heißt dann MINKOWSKI-Raum und $\mathrm{O}(V, \Phi)$ im Falle $n = \mathrm{Dim}(V) = 4$ die

LORENTZ-Gruppe. Im komplexen Fall hatten wir gesehen, daß die Dimension $\mathrm{Dim}(V^{\perp,\Phi})$ des Radikals eine trennende Invariante ist. Für andere Körper ist die Situation sehr viel komplizierter.
In Matrizen: $G := \mathrm{GL}(n, K)$ operiert auf $K^{n\times n}_{sym}$ durch

$$G \times K^{n\times n}_{sym} : (g, F) \mapsto g^{-tr} F g^{-1}.$$

Den Stabilisator von $F = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-k})$ bezeichnet man mit $\mathrm{O}(k, n-k, \mathbb{R})$ im Falle $K = \mathbb{R}$.

Übung: Man zeige, daß die Einträge der Matrizen in $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ beschränkt sind, jedoch bei $\mathrm{O}(n-1, 1, \mathbb{R})$ nicht.

Bevor wir weitere Beispiele aufzählen, betrachten wir noch eine Definition, die den Übersetzungsprozeß in die Matrixsprache in einen allgemeineren Rahmen stellt.

Es sei an dieser Stelle vermerkt, dass das Studium der linearen Gruppenoperationen eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Sie wird in der Darstellungstheorie von Gruppen intensiv betrieben und hat viele Anwendungen.

Eine sehr wichtige lineare Operation der vollen linearen Gruppe haben wir im letzten Abschnitt diskutiert. Hier nochmals die Quintessenz:

***Beispiel* 6.12.** $G := \mathrm{GL}(V)$ operiert linear auf $\mathrm{End}(V)$ für endlich erzeugte $K$-Vektorräume $V$ durch

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V) : (g, \varphi) \mapsto g \circ \varphi \circ g^{-1}.$$

Im Kapitel über Endomorphismen haben wir die Bahnen dieser sehr wichtigen Operation studiert. Die Matrixversion liefert Standardvertreter durch die sogenannte JORDAN-Normalformen. Wieder ist die Operation des Stabilisators auf $V$ von ganz zentraler Bedeutung.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer nicht linearen Operation. Sie ist aber noch sehr verwandt mit linearen Operationen und kann daher auch in der Matrixsprache hingeschrieben werden, was wir als Übung lassen, ebenso wie die Anwendung von Bemerkung 6.6.

Übung: Sei $V$ endlich erzeugter $K$-Vektorraum und $\mathcal{TR}_k(V)$ die Menge der $k$-dimensionalen Teilräume von $V$. Zeige: $\mathrm{GL}(V)$ operiert transitiv auf $\mathcal{TR}_k(V)$ und

$$d : \mathcal{TR}_k(V) \times \mathcal{TR}_k(V) \to \mathbb{R} : (U, W) \mapsto k - \mathrm{Dim}(U \cap W)$$

ist eine trennende Invariante der diagonalen Operation auf $\mathcal{TR}_k(V) \times \mathcal{TR}_k(V)$, also ist

$$\mathcal{TR}_k(V) \to \mathbb{R} : W \mapsto k - \mathrm{Dim}(U \cap W)$$

eine trennende Invariante für die Operation von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(V)}(U)$ auf $\mathcal{TR}_k(V)$.