Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University
Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 11 (11.7./12.7.2017)

Die Klausurzulassungsbedingung, eine Aufgabenlösung im Tutorium vorzustellen, kann auch durch die Vorstellung einer Präsenzaufgabe erfüllt werden.

1. Zeigen Sie, dass für Matrizen A, B über den komplexen Zahlen, für die das Produkt AB definiert ist, gilt:
$$(AB)^* = B^* A^*.$$

2. Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper ist, können wir V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum (mit gleicher Addition und skalarer Multiplikation) auffassen. Zeigen Sie, dass $(b_1, ib_1, b_2, ib_2, \ldots, b_n, ib_n)$ eine Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. (Die Dimension als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist also doppelt so groß, wie die Dimension als $\mathbb{C}$-Vektorraum.)

3. Jetzt betrachten wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{n\times n}$. Wir haben die hermiteschen Matrizen $\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{Herm}} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{Herm}}$ kein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist, aber ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum.

4. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\mathbb{C}^{n\times n}_{\text{Herm}} \to \mathbb{C}^{n\times n}_{\text{Schiefherm}}, \quad M \mapsto iM,$$
ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.