Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University

Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 9 (27.6./28.6.2017)

Die Klausurzulassungsbedingung, eine Aufgabenlösung im Tutorium vorzustellen, kann auch durch die Vorstellung einer Präsenzaufgabe erfüllt werden.

1. (Minimalpolynom und charakteristisches Polynom)

   Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n und sei $\alpha \in \mathrm{End}(V)$.

   (a) Sei $p \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom mit $\mathrm{Rang}(p(\alpha)) < n$. Zeigen Sie, dass p ein Teiler des Minimalpolynoms μ_α ist.

   (b) Sei $v \in V$ und α_v die Einschränkung von α auf den (α-invarianten) Teilraum $\langle v \rangle_\alpha$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\alpha_v} = \mu_{\alpha_v}$.

   (c) Aus den Sätzen über die Hauptraumzerlegung (LA I) und Satz 3.12 wissen wir, dass V eine direkte Summenzerlegung

   $$V = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle v_i \rangle_\alpha$$

   besitzt, wobei für $1 \leq i \leq r$ der Vektor $v_i \in V$ ein Minimalpolynom der Form $\mu_{\alpha,v} = p_i^{m_i}$ hat mit $p_i \in K[X]$ irreduzibel und $m_i \in \mathbb{N}$.

   Beschreiben Sie mit Hilfe dieser p_i und m_i das charakterische Polynom χ_α und das Minimalpolynom μ_α.

   Schließen Sie aus dieser Beschreibung, dass χ_α und $\mu_\alpha \in K[X]$ die gleichen irreduziblen Teiler besitzen.