Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University
Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 8 (20.6./21.6.2017)

Die Klausurzulassungsbedingung, eine Aufgabenlösung im Tutorium vorzustellen, kann auch durch die Vorstellung einer Präsenzaufgabe erfüllt werden.

1. (Determinante von Block-Dreiecksmatrix)

   Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ mit $A \in K^{k\times k}$, $B \in K^{k\times(n-k)}$, $D \in K^{(n-k)\times(n-k)}$ für ein $1 \leq k < n$. Zeigen Sie, dass $\det(M) = \det(A)\cdot\det(D)$ und dass $\chi_M = \chi_A\chi_D$ gilt.

2. (Ableitung als lineare Abbildung auf einem Funktionenraum)

   Für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seien $s_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^i \sin(x)$ und $c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^i \cos(x)$. Sei V_r der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, der von $\{s_i, c_i \mid\ 0 \leq i \leq r\}$ aufgespannt wird.

   Sei $\alpha_r \in \mathrm{End}(V_r)$ mit $\alpha_r(f) = f'$ für $f \in V$ (Ableitung).

   - Zeigen Sie, dass α_r tatsächlich ein Endomorphismus von V_r für jedes r ist.
   - Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von α_r bezüglich der Basis $(s_0, c_0, s_1, c_1, \ldots, s_r, c_r)$.
   - Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α_r.
   - Tatsächlich ist das Minimalpolynom von α_r gleich seinem Minimalpolynom. Bestimmen Sie (eventuell unter Ausnutzung dieser Tatsache) einen zyklischen Vektor für α_r in V_r.