Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University

Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 7 (13.6./14.6.2017)

Die Klausurzulassungsbedingung, eine Aufgabenlösung im Tutorium vorzustellen, kann auch durch die Vorstellung einer Präsenzaufgabe erfüllt werden.

1. (Invariante Abbildungen und Projektionen)

   Seien V ein K-Vektorraum, $V_1, V_2 \leq V$ mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $\pi_i : V \to V_i$ die zugehörige Projektion ($i = 1, 2$). Insbesondere ist also $V_1 = \mathrm{Bild}(\pi_1) = \mathrm{Kern}(\pi_2)$ und $V_2 = \mathrm{Bild}(\pi_2) = \mathrm{Kern}(\pi_1)$. Sei $\beta \in \mathrm{End}(V)$.

   Zeigen Sie, dass V_1 und V_2 genau dann beide β-invariant sind, wenn gilt $\pi_1 \circ \beta \circ \pi_2 = 0$ und $\pi_2 \circ \beta \circ \pi_1 = 0$.

2. (Zyklische Vektoren)

   Definition: Sei V ein Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Ein Vektor $v \in V$ heißt *zyklischer Vektor* für α, falls $\langle v \rangle_\alpha := K[\alpha](v) = V$ ist.

   Sei $V = \mathbb{F}_2^4$. Wir beschreiben drei Endomorphismen von V durch Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Für welche Endomorphismen φ_{A_i}, $1 \leq i \leq 3$, gibt es einen zyklischen Vektor?

   Wenn es einen gibt, bestimmen Sie einen. Und andernfalls zeigen Sie, dass es keinen gibt.