Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University
Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 5 (23.5./24.5.2017)

Auf mehrfachen Wunsch sind hier wieder einige Präsenzaufgaben für die Tutorien. Die Klausurzulassungsbedingung, eine Aufgabenlösung im Tutorium vorzustellen, kann auch durch die Vorstellung einer Präsenzaufgabe erfüllt werden.

1. (Vorbereitung auf Aufgabe 24)

   Sei V ein Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$. Weiter sei Φ eine Bilinearform auf V mit der Eigenschaft, dass ${}_B\Phi^B$ invertierbar ist (ein solches Φ wird auch *nicht ausgeartet* genannt).

   Zeigen Sie, dass es eine Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ von V gibt mit $\Phi(c_i, b_j) = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

2. (Beschreibung linearer Abbildungen mit Linearformen)

   Seien V, W K-Vektorräume und $B = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V. Sei $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung und $(c_1, \dots, c_r)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\alpha)$. Zeigen Sie, dass es eindeutige $\phi_1, \dots, \phi_r \in V^*$ gibt mit $\alpha(v) = \phi_1(v)c_1 + \dots \phi_r(v)c_r$ für alle $v \in V$.

3. (Zusammenhang zwischen linearer Abbildung und ihrer Transponierten)

   Seien V, W Vektorräume und $\alpha : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass α^{tr} genau dann surjektiv (bzw. injektiv) ist, wenn α injektiv (bzw. surjektiv) ist.

   Sei T ein weiterer Vektorraum und $\beta : W \to T$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann gilt $(\beta \circ \alpha)^{tr} = \alpha^{tr} \circ \beta^{tr}$.

4. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $U, T \leq V$. Zeigen Sie:

   - $(V/U)^* \cong U^\perp$.
   - $(U + T)^\perp = U^\perp \cap T^\perp$.
   - $(U \cap T)^\perp = U^\perp + T^\perp$.