Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen University

Lineare Algebra II
SS 2017

Präsenzaufgaben 1 (25.4./26.4.2017)

1. Ziel dieser Aufgabe ist es einzusehen, dass man Blockmatrizen blockweise multiplizieren kann. Sei K ein Körper und $A_{ij} \in K^{m_i \times n_j}$ und $B_{ij} \in K_{n_i \times \ell_j}$ Matrizen für $i, j \in \{1, 2\}$. Wir definieren Matrizen $A \in K^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)}$ und $B \in K^{(n_1+n_2)\times(\ell_1+\ell_2)}$ als
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass dann
$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Seien $m, n \in N$ und $C \in K^{m\times n}$. Definiere $A := (I_m, C) \in K^{m\times(m+n)}$ und $B := \begin{pmatrix} -C \\ I_n \end{pmatrix} \in K^{(m+n)\times n}$. Zeigen Sie, dass die Spalten von B eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$ bilden.

3. Sei V ein K-Vektorraum und $\pi : V \to V$ eine Projektion. Zeigen Sie:
   (a) $\mathrm{Kern}(\pi) \cap \mathrm{Bild}(\pi) = \{0\}$.
   (b) $V = \mathrm{Kern}(\pi) \oplus \mathrm{Bild}(\pi)$, d.h. für jedes $v \in V$ existieren eindeutige $u \in \mathrm{Kern}(\pi)$ und $w \in \mathrm{Bild}(\pi)$ mit $v = u + w$.
   (c) Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, die so gewählt sei, dass $(b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\pi)$ ist und $(b_{k+1}, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\pi)$ ist. (Insbesondere ist $k = \mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}(\pi))$. Bestimmen Sie ${}^B\pi^B$.
   (d) Sei $\sigma : V \to V$ eine weitere Projektion mit $\mathrm{Kern}(\sigma) = \mathrm{Kern}(\pi)$ und $\mathrm{Bild}(\sigma) = \mathrm{Bild}(\pi)$. Zeigen Sie, dass $\pi = \sigma$.
   (e) Sei $\pi : \mathbb{Q}^{3\times1} \to \mathbb{Q}^{3\times1}$ die Projektion mit
$$\mathrm{Kern}(\pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \in Q^{3\times1} \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(\pi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \in Q^{3\times1}.$$
   Bestimmen Sie ${}^S\pi^S$, wobei S die Standardbasis von $\mathbb{Q}^{3\times1}$ sei.